COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 25/06/2025
II parte

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici. Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & -2 \leq x \leq -\frac{1}{e} \\ x + \frac{1}{e} - 1 & -\frac{1}{e} < x \leq 2, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico e si dica se f è continua e derivabile nell'intervallo di definizione. Si dica poi se alla funzione f nell'intervallo $\left[-2, 2\right]$ è applicabile il teorema degli zeri. Si dica infine in quali punti è comunque vera la tesi del teorema.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Dati i tre vettori

$$v^1 = (1, 0, -1) \quad , \quad v^2 = (0, -1, 1) \quad , \quad v^3 = (1, -1, 1)$$

si dica se essi sono una base di $\mathbb{R}^3$. Nei tre vettori dati ci sono coppie di vettori ortogonali? Si scriva il vettore $(1, 1, 1)$ come combinazione lineare dei tre vettori. Se A è la matrice formata con i tre vettori, che cosa possiamo dire delle soluzioni del sistema lineare $Ax = 0$?

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = x + y + x^2 - y^3$$

Si calcoli il gradiente di f e si provi che ci sono due punti stazionari. Con le condizioni del secondo ordine si stabilisca la natura dei punti stazionari. Si consideri infine la restrizione di f all'asse x e si dica se sull'asse c'è un punto di massimo o minimo vincolato.

QUESITO 1. Si commenti l'affermazione: "una funzione che ha massimo e minimo in un intervallo $[a, b]$, chiuso e limitato, è certamente continua in questo intervallo".

QUESITO 2. Si enunci il teorema degli zeri.

QUESITO 3. Si commenti l'affermazione: "la derivata di una funzione f in un punto è la retta tangente di f in quel punto".

QUESITO 4. Si dica che cosa significa per definizione che i vettori v^1, v^2, v^3 sono linearmente indipendenti.

QUESITO 5. Se una forma quadratica ha valore positivo in un punto che cosa possiamo dire con certezza?