COGNOME														
NOME														
MATRICOLA						VR								

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 26/06/2026
II parte

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici. Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & x \leq -1 \\ x^2 - 1 & x > -1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f. Qual è l'immagine attraverso f dell'intervallo $[0, 2]$? Qual è la controimmagine attraverso f dell'intervallo $(0, +\infty)$?
Si dica infine perché ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2, 2]$ e si indichino i punti in cui è verificata la tesi del teorema.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Si consideri la trasformazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determini la dimensione dell'immagine della trasformazione lineare e si dica se il primo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$ appartiene a tale immagine. Si dica se il vettore $(11, -11, 11)$ è soluzione del sistema omogeneo $Ax = 0$. Si trovino infine tutte le soluzioni di questo sistema omogeneo.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^3 + 2x + 3y,$$

si trovino i suoi punti stazionari e si studi la natura di questi punti con le condizioni del secondo ordine. Si trovino infine tutti i punti sugli assi cartesiani in cui la funzione si annulla, disegnandoli in un grafico.

DOMANDA 1. Data una funzione $f : A \to B$, che cosa è la controimmagine attraverso f di un certo elemento $b \in B$?

DOMANDA 2. Si enunci il teorema degli zeri.

DOMANDA 3. Che cosa significa che una funzione f è derivabile in un punto x_0?

DOMANDA 4. Come si calcola il complemento algebrico di un particolare elemento di una matrice quadrata?

DOMANDA 5. Perché la funzione $f(x, y) = x^2 + xy + y$ non è una forma quadratica?

COGNOME

NOME

MATRICOLA VR

ESAME DI MATEMATICA

Vicenza, 26/06/2026

II parte

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici. Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & x \leq -1 \\ 1 - x^2 & x > -1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f. Qual è l'immagine attraverso f dell'intervallo $[0, 2]$? Qual è la controimmagine attraverso f dell'intervallo $(0, +\infty)$?
Si dica infine perché ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2, 2]$ e si indichino i punti in cui è verificata la tesi del teorema.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Si consideri il sistema di equazioni lineari $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Si dica perché possiamo affermare che il sistema ha soluzioni, senza trovarle. Successivamente, si trovino le soluzioni. Si scriva quindi una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato.
Si determini la dimensione dell'immagine della trasformazione lineare $T(x) = Ax$ e si dica infine se il primo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$ appartiene a tale immagine.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = y(x^2 + y - 1),$$

si trovino i suoi punti stazionari e si studi la natura di questi punti con le condizioni del secondo ordine. Si dica infine in quali punti la funzione si annulla, disegnandoli in un grafico.

DOMANDA 1. Che cosa significa che è definita una funzione f dall'insieme A all'insieme B ?

DOMANDA 2. Che cosa significa che una funzione f è derivabile in un punto x_0?

DOMANDA 3. Che ipotesi è necessario fare su f per definire il suo integrale di Riemann nell'intervallo $[a, b]$?

DOMANDA 4. Quando tre vettori v^1, v^2, v^3 si dicono linearmente indipendenti?

DOMANDA 5. Si commenti l'affermazione: per una funzione $f(x, y)$ la sua derivabilità implica la sua continuità.