Svolgimento dei temi d'esame di MDEF
Anno Accademico 2015/16

Alberto Peretti

Settembre 2016

PROVA INTERMEDIA di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 06/11/2015

ESERCIZIO 1. Dato il tasso di interesse quadrimestrale $i_{1/3} = 0,05$, determinare:

(a) l'equivalente tasso di interesse trimestrale $i_{1/4}$ in capitalizzazione composta;

(b) l'equivalente tasso di sconto trimestrale $d_{1/4}$ in capitalizzazione semplice;

(c) l'equivalente tasso di interesse trimestrale $i_{1/4}$ nel regime di sconto commerciale.

✎

(a) Possiamo convertire il tasso di interesse quadrimestrale nel tasso annuo e successivamente quest'ultimo nel tasso di interesse trimestrale. Quindi

$$i = (1+i_{1/3})^3 - 1 = (1+0.05)^3 - 1 = 0.157625 \quad ; \quad i_{1/4} = (1+i)^{1/4} - 1 = (1+0.157625)^{1/4} - 1 = 0.037270375.$$

(b) Come fatto poco fa nel RIC, possiamo convertire ora nel RIS $i_{1/3}$ in i e quindi in $i_{1/4}$ e finalmente nel corrispondente tasso di sconto $d_{1/4}$. Quindi

$$i = 3i_{1/3} = 3 \cdot 0.05 = 0.15 \quad ; \quad i_{1/4} = \frac{1}{4}i = \frac{1}{4}0.15 = 0.0375 \quad ; \quad d_{1/4} = \frac{i_{1/4}}{1+i_{1/4}} = \frac{0.0375}{1+0.0375} = 0.036144578.$$

(c) l'equivalente tasso di interesse trimestrale $i_{1/4}$ nel regime di sconto commerciale.

Tenendo in considerazione che nel regime dello sconto commerciale abbiamo una formula semplice di conversione dei tassi di sconto, possiamo seguire questa strada:

$$i_{1/3} \quad \to \quad d_{1/3} \quad \to \quad d \quad \to \quad d_{1/4} \quad \to \quad i_{1/4}.$$

Quindi

$$d_{1/3} = \frac{i_{1/3}}{1+i_{1/3}} = \frac{0.05}{1+0.05} = 0.047619047 \quad ; \quad d = 3d_{1/3} = 3 \cdot 0.047619047 = 0.142857141$$

e

$$d_{1/4} = \frac{1}{4}d = \frac{1}{4}0.142857141 = 0.035714285 \quad ; \quad i_{1/4} = \frac{d_{1/4}}{1-d_{1/4}} = \frac{0.035714285}{1-0.035714285} = 0.037037036.$$

ESERCIZIO 2. Il 01/01/2012 sono stati investiti 20 000 per 3 anni al tasso di interesse annuo $i = 5\%$ nel regime dell'interesse composto. Sapendo che i tassi di variazione dei prezzi sono stati (su base annua): $g_{12} = 0.02$ nel 2012, $g_{13} = 0.03$ nel 2013 e $g_{14} = 0.02$ nel 2014, si determini:

1. il tasso medio $\overline{g}$ di aumento dei prezzi nei 3 anni (su base annua);
2. l'importo che dopo 3 anni ha lo stesso potere d'acquisto dell'investimento iniziale;
3. gli interessi reali prodotti dall'investimento;
4. il tasso di interesse reale annuo dell'investimento.

✎

1. Per determinare il tasso medio $\overline{g}$ di aumento dei prezzi nei 3 anni (su base annua) l'equazione è
$$(1+\overline{g})^3 = (1+g_1)(1+g_2)(1+g_3)$$
da cui
$$\overline{g} = \Big((1+g_1)(1+g_2)(1+g_3)\Big)^{1/3} - 1 = \Big(1.02 \cdot 1.03 \cdot 1.02\Big)^{1/3} - 1 = 0.023322499.$$

2. L'importo che dopo 3 anni ha lo stesso potere d'acquisto dell'investimento iniziale è dato da
$$C_t = 20\,000(1+\overline{g})^3 = 21\,432.24.$$

3. Gli interessi reali (I_r) prodotti dall'investimento sono dati dalla differenza tra il montante dell'investimento iniziale e l'importo C_t appena trovato. Quindi
$$I_r = M - C_t = 20\,000(1+0.05)^3 - 21\,432.24 = 23\,152.50 - 21\,432.24 = 1\,720.26.$$

4. Il tasso di interesse reale annuo dell'investimento (i_r) è dato da
$$i_r = \frac{i-\overline{g}}{1+\overline{g}} = \frac{0.05 - 0.023322499}{1+0.023322499} = 0.026069495.$$

ESERCIZIO 3. Una società finanziaria, relativamente ad un bene con prezzo di listino $P = 20\,000$, vuole proporre ad un cliente un contratto di leasing di durata 4 anni che prevede un anticipo del 10% del prezzo di listino, un riscatto pari al 5% del prezzo di listino e il versamento di 12 canoni quadrimestrali posticipati. La società può avere uno sconto del 10% sull'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto un tasso di interesse annuo del 9%. Si scriva l'equazione del valore per la società di leasing e si determini a quanto deve ammontare il canone da proporre al cliente.
Sapendo che il cliente può avere uno sconto del 5% sull'acquisto del bene, si scriva l'equazione del valore per il cliente.
Sapendo infine che il cliente per l'acquisto diretto del bene può avere un prestito dalla sua banca al tasso di interesse annuo dell'8%, si dica se egli ragionevolmente sceglierà il prestito bancario o il contratto di leasing.

✎

La società finanziaria spende $20\,000 \cdot (1-0.1) = 18\,000$ per l'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto di leasing un tasso di interesse del 9%.

Le quantità rilevanti nel contratto sono l'anticipo $A = 20\,000 \cdot 0.1 = 2\,000$ e il riscatto finale $F = 20\,000 \cdot 0.05 = 1\,000$. Serve anche il tasso di interesse quadrimestrale $i_{1/3} = 1.09^{1/3} - 1 = 0.029142467$.

Indicato con R il canone quadrimestrale, l'equazione del valore per la società di leasing è
$$18\,000 = 2\,000 + 1\,000(1+0.09)^{-4} + R\mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/3}}.$$

Da questa si ricava
$$R = \frac{18\,000 - 2\,000 - 1\,000(1+0.09)^{-4}}{\mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/3}}} = 1\,528.37.$$

Ora passiamo alla valutazione del cliente, al quale viene proposto un contratto di leasing con le caratteristiche ottenute poco fa (cioè un anticipo di 2 000, un riscatto finale di 1 000 e un canone di 12 rate quadrimestrali di 1 528.37). Tenendo conto che il cliente può avere uno sconto del 5% sul prezzo d'acquisto del bene, egli è interessato a scoprire qual è il tasso implicito nell'equivalenza finanziaria tra lo spendere oggi $20\,000 \cdot 0.95 = 19\,000$ e distribuire il pagamento nel tempo alle condizioni del contratto.

La sua equazione del valore è quindi
$$19\,000 = 2\,000 + 1\,000(1+0.09)^{-4} + 1\,528.37\mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/3}}.$$

La soluzione esatta $i^\star_{1/3}$ di questa equazione (riportata poi su base annua) fornirebbe al cliente un valore preciso da confrontare con il tasso proposto dalla banca per un prestito di 19 000. La risoluzione esatta (in realtà approssimata) di questa equazione richiederebbe l'uso di approssimazioni successive, eventualmente con il metodo di Newton, e non è richiesta.

Per poter dire quale sarà la scelta ragionevole del cliente tra stipulare il contratto di leasing e chiedere un prestito alla banca al tasso $i^{(B)} = 8\%$ possiamo semplicemente calcolare il valore attuale degli importi relativi al contratto al tasso della banca. Dopo aver calcolato il tasso equivalente quadrimestrale $i^{(B)}_{1/3} = 0.025985568$, si trova

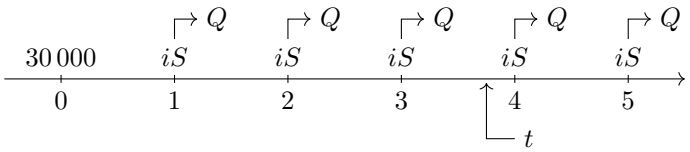
$$2\,000 + 1\,000(1 + i^{(B)})^{-4} + 1\,528.37\mathrm{a}_{\overline{12}|i^{(B)}_{1/3}} = 18\,319.54.$$

Dato che $18\,319.54 < 19\,000$, il tasso della banca sconta maggiormente gli importi rispetto al tasso effettivo incognito e quindi il tasso della banca è maggiore rispetto ad $i^\star$.

Il cliente ragionevolmente sceglierà il contratto di leasing.

ESERCIZIO 4. Un prestito di 30 000 viene restituito in 5 rate annue posticipate con un ammortamento americano a due tassi. Per quanto riguarda gli interessi, pagati anch'essi in via posticipata, il tasso di remunerazione concordato è del 6%. Per la restituzione del capitale, la banca presso la quale vengono depositate le quote di accumulazione offre un tasso del 4%. Si determini l'ammontare della quota interessi I e della quota di accumulazione Q. Si calcoli il fondo di accumulazione dopo 3 anni e 9 mesi. Si scriva l'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo dell'ammortamento e si dica se questo tasso è maggiore o minore del 7%.

✎



Indicando con $S = 30\,000$ l'ammontare del prestito e con $i = 0.06$ il tasso di remunerazione, la quota interessi I è costante ed è uguale agli interessi annui sull'intero debito. Quindi si ha

$$I = iS = 0.06 \cdot 30\,000 = 1\,800.$$

Indicando con Q la quota di accumulazione, anch'essa costante, e con $i^\star = 0.04$ il tasso di accumulazione, Q si determina in modo che il montante delle 5 quote sia uguale al capitale mutuato. Quindi essa deve soddisfatta l'equazione

$$Q\mathrm{a}_{\overline{5}|i^\star}(1 + i^\star)^5 = S,$$

da cui

$$Q = \frac{S}{\mathrm{a}_{\overline{5}|i^\star}(1 + i^\star)^5} = \frac{30\,000}{\mathrm{a}_{\overline{5}|0.04}(1 + 0.04)^5} = 5\,538.81.$$

Pertanto la rata di ammortamento (anch'essa costante) è

$$R = Q + I = 1\,800.27 + 5\,538.81 = 7\,338.81.$$

Il fondo di accumulazione F_t dopo 3 anni e 9 mesi è il valore delle quote di accumulazione già versate dopo 3 anni e 9 mesi, cioè all'epoca $t = 3 + \frac{9}{12}$. Dato che all'epoca t sono state versate 3 quote di accumulazione, si ha

$$F_t = Q\mathrm{a}_{\overline{3}|i^\star}(1 + i^\star)^t = 5\,538.81\mathrm{a}_{\overline{3}|i^\star}(1 + i^\star)^{3+9/12} = 17\,806.10.$$

L'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo i_{eff} dell'ammortamento è

$$S = R\mathrm{a}_{\overline{5}|i_{\mathrm{eff}}} \quad \text{cioè} \quad 30\,000 = 7\,338.81\mathrm{a}_{\overline{5}|i_{\mathrm{eff}}}.$$

Per stabilire se il tasso effettivo è maggiore o minore del 7% basta calcolare qual è il valore attuale delle 5 rate dell'ammortamento al tasso del 7%. Si trova

$$7\,338.81\mathrm{a}_{\overline{5}|0.07} = 30\,090.57.$$

Dato che il tasso effettivo sconta più del tasso del 7%, significa che il tasso effettivo è maggiore del 7%.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 15/01/2016

ESERCIZIO 1. Trovare una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza ytm di un'obbligazione con le seguenti caratteristiche:
- valore facciale $F = 100$;
- scadenza tra 4 anni;
- rimborso alla pari $C = 100$;
- cedole annue con tasso cedolare $r = 6\%$;
- corso $P = 103.50$.

Si effettui il calcolo prima senza la tassazione e poi con la tassazione.
Si dimostri poi che se fosse $P = 100$, avremmo $ytm = 6\%$.

✎

P	6	6	6	$6 + 100$
0	1	2	3	4

Ponendo $F = 100$, $r = 0.06$, $C = 100$, $P = 103.50$ e $n = 4$, la formula per una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza fornisce

$$ytm_0 = \frac{rF + (C - P)/n}{(C + 2P)/3} = \frac{0.06 \cdot 100 + (100 - 103.50)/4}{(100 + 2 \cdot 103.50)/3} = 0.050081433.$$

Considerando la tassazione e indicando con γ l'aliquota del 12.50%, cioè $\gamma = 0.125$, la cedola netta è $rF(1-\gamma) = 5.25$.
La tassazione non colpisce il capitale in quanto il prezzo di acquisto $P = 103.50$ supera il valore di rimborso $C = 100$ e quindi il rimborso netto è $\text{C}_\text{N} = 100$. Pertanto

$$ytm_0 = \frac{rF(1-\gamma) + (\text{C}_\text{N} - P)/n}{(\text{C}_\text{N} + 2P)/3} = \frac{5.25 + (100 - 103.50)/4}{(100 + 2 \cdot 103.50)/3} = 0.042752443.$$

È richiesto infine di dimostrare che se fosse $P = 100$, avremmo $ytm = 6\%$. Anzitutto preciso che non è accettabile qui l'uso della formula approssimata usata in precedenza, che peraltro fornirebbe

$$ytm = \frac{rF + (C - P)/n}{(C + 2P)/3} = \frac{0.06 \cdot 100 + (100 - 100)/4}{(100 + 2 \cdot 100)/3} = \frac{6}{100} = 0.06,$$

in quanto si tratta pur sempre di una formula che dà un valore approssimato e quindi inadatta a dimostrare che la soluzione è un valore particolare.
Sostanzialmente si tratta di provare che l'equazione

$$100 = 6 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|i} + 100(1 + i)^{-4} \tag{1}$$

ha per soluzione $i = 0.06$. Propongo due strade per dimostrarlo.
La prima è semplicemente verificare che l'equazione è soddisfatta da $i = 0.06$:[1] banalmente si trova

$$6 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|0.06} + 100(1 + 0.06)^{-4} = 100.$$

La seconda è risolvere algebricamente l'equazione, usando l'espressione di $\mathrm{a}_{\overline{4}|i}$. L'equazione (**??**) equivale a

$$100 = 6 \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-4}}{i} + 100(1 + i)^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad 100 - 100(1 + i)^{-4} = 6 \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-4}}{i}$$

cioè

$$100\left(1 - (1 + i)^{-4}\right) = 6 \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-4}}{i} \quad \Leftrightarrow \quad 100i = 6 \quad \text{e quindi} \quad i = \frac{6}{100}.$$

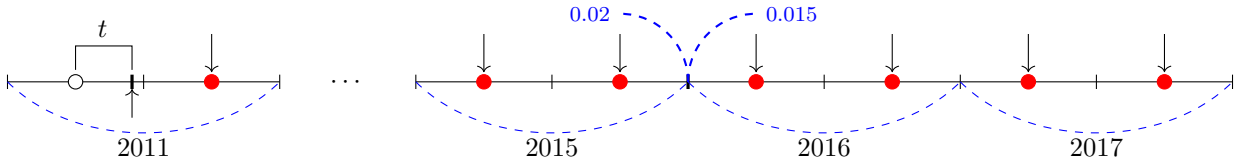
[1] Ricordo che possiamo essere certi dell'unicità della soluzione poiché la quantità che sta a destra è decrescente al crescere del tasso.

ESERCIZIO 2. Un B.T.P. decennale con scadenza il 01/10/2017 paga cedole il 01/04 e il 01/10 al tasso cedolare $r = 3.5\%$. Verrà rimborsato alla pari. Il 15/06/2011 presentava un tasso di rendimento a scadenza $ytm = 3\%$. Si determini il prezzo tel quel P_{tq} e il corso secco P_s in quella data. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Ipotizzando di aver acquistato il titolo in data 15/06/2011, di tenerlo fino alla scadenza e di aver dato disposizione di reinvestire le cedole su un conto corrente, dove il tasso di interesse a credito è stato del 2% fino al 31/12/2015 ed è ora del 1.5%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

✎

La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P.



Non c'è tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.035}{2} \cdot 100 = 1.75.$$

Il calcolo del numero di cedole: in tutto sono $n = 13$. Il tempo t tra la cedola precedente e l'acquisto: si ha $t = 30 + 30 + 15 = 75$ giorni.

Serve anche convertire il tasso di rendimento a scadenza nell'equivalente tasso semestrale. Si ha

$$ytm_{1/2} = (1 + ytm)^{1/2} - 1 = 1.03^{1/2} - 1 = 0.014889156.$$

Il prezzo tel quel del titolo è dato da

$$P_{\text{tq}} = \left(1.75\mathrm{a}_{\overline{13}|ytm_{1/2}} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-13}\right) \cdot (1 + ytm)^{75/360} = 103.70.$$

Il rateo è dato da

$$\text{rateo} = 1.75 \cdot \frac{75}{180} = 0.73$$

e quindi il corso secco P_s è

$$P_s = P_{\text{tq}} - \text{rateo} = 103.70 - 0.729 = 102.97.$$

Passiamo al calcolo del rendimento effettivo a seguito del reinvestimento delle cedole. Dobbiamo uguagliare il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo con il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/10/2017, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{6+105/360}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni. Dal 15/06/2011 al 01/10/2017 sono 6 anni e 105 giorni (ma si poteva anche fare 6.5 anni meno 75 giorni).

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2015, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 9 cedole da valutare al tasso $i^1 = 2\%$ (montante M_1) e le restanti 4 cedole al tasso $i^2 = 1.5\%$ (montante M_2).

Servono i tassi semestrali equivalenti:

$$i^1_{1/2} = 0.009950493 \quad \text{e} \quad i^2_{1/2} = 0.007472083.$$

Quindi

$$M_1 = 1.75 \cdot \mathrm{a}_{\overline{9}|i^1_{1/2}}(1 + i^1_{1/2})^{9+90/180} \cdot (1 + i^2)^{1+9/12} = 16.90785166$$

e

$$M_2 = 1.75 \cdot a_{\overline{4}|i^2_{1/2}}(1 + i^2_{1/2}) \cdot (1 + i^2_{1/2})^3 = 7.078848435.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{6+105/360} = M_1 + M_2 + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = 0.028805302.$$

ESERCIZIO 3. Si considerino i due seguenti progetti finanziari:

		−50		10		20		10		30				−50		0		30		20		20
A.												*B.*										
		0		1		2		3		4				0		1		2		3		4

dove gli importi sono espressi in migliaia di euro.
Si calcoli il REA di entrambi, prima nell'ipotesi di un tasso esterno nullo e poi di un tasso esterno del 4%, indicando anche quale progetto è preferibile, nei due casi. I due progetti sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro al 4%?
Si dica poi se il TIR dei due progetti è maggiore o minore del 4%. Si determini infine quali sono i tassi per cui i due progetti sono equivalenti in base al criterio del REA.

✎

Manteniamo per comodità la scrittura degli importi in migliaia di euro. Nell'ipotesi di un tasso esterno nullo ($i = 0$) non c'è alcun effetto finanziario del tempo, quindi gli importi non subiscono variazioni. Pertanto

$$\text{REA}_A(0) = -50 + 10 + 20 + 10 + 30 = 20$$

e

$$\text{REA}_B(0) = -50 + 30 + 20 + 30 = 20.$$

I due progetti sono quindi equivalenti.

Nell'ipotesi di un tasso esterno $i = 4\%$ si ha

$$\text{REA}_A(0.04) = -50 + \frac{10}{1.04} + \frac{20}{1.04^2} + \frac{10}{1.04^3} + \frac{30}{1.04^4} = 12.64$$

e

$$\text{REA}_B(0.04) = -50 + \frac{30}{1.04^2} + \frac{20}{1.04^3} + \frac{20}{1.04^4} = 12.61.$$

In questo caso i due progetti non sono equivalenti e risulta conveniente il progetto A. I due progetti sono comunque sempre convenienti rispetto all'investimento di denaro, dato che il REA è positivo in entrambi i casi.

Possiamo anche affermare che il TIR di entrambi i progetti è maggiore del 4%, dato che i REA sono positivi. Attenzione che possiamo arrivare a questa conclusione perché la funzione $\text{REA}(i)$ è decrescente, dato che c'è un solo importo iniziale negativo e poi soltanto importi positivi.

Dobbiamo infine determinare i tassi per cui i due progetti sono equivalenti in base al criterio del REA. Basta uguagliare le due funzioni REA:

$$-50 + \frac{10}{1+i} + \frac{20}{(1+i)^2} + \frac{10}{(1+i)^3} + \frac{30}{(1+i)^4} = -50 + \frac{30}{(1+i)^2} + \frac{20}{(1+i)^3} + \frac{20}{(1+i)^4}.$$

Qui possiamo semplificare le espressioni utilizzando il fattore di sconto $v = \frac{1}{1+i}$. L'equazione diventa

$$-50 + 10v + 20v^2 + 10v^3 + 30v^4 = -50 + 30v^2 + 20v^3 + 20v^4$$

cioè

$$10v - 10v^2 - 10v^3 + 10v^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v - v^2 - v^3 + v^4 = 0.$$

Ora, ricordando le tecniche elementari del raccoglimento, si può scrivere

$$v(1-v) - v^3(1-v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v(1-v)(1-v^2) = 0.$$

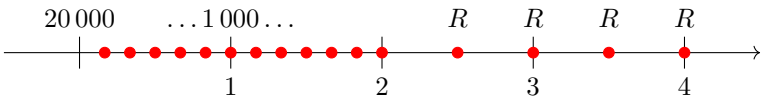
Le soluzioni algebriche dell'equazione sono: $v = 0$, $v = 1$, $v = -1$. Non tutte hanno un significato finanziario, dato che $v = \frac{1}{1+i}$. La prima non è nemmeno algebricamente accettabile, la seconda porta a $i = 0$ e la terza a $i = -2$ (cioè un tasso negativo del 200%). Chiaramente solo $i = 0$ può avere un senso concreto e corrisponde alla situazione della prima domanda.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 15/01/2016

ESERCIZIO 1. Voglio restituire un prestito di 20 000 in 4 anni, i primi due anni mediante rate bimestrali costanti posticipate di 1 000 e per i restanti due anni mediante rate semestrali costanti posticipate. Nell'ipotesi che il tasso di interesse annuo applicato sia $i = 5\%$, si determini l'ammontare della rata semestrale.

Nell'ipotesi invece di poter pagare una rata mensile posticipata di 500, con quante rate, allo stesso tasso, posso restituire il prestito?

✎



L'equazione che esprime l'equivalenza degli importi è

$$20\,000 = 1\,000 \cdot a_{\overline{12}|1_{1/6}} + R \cdot a_{\overline{4}|1_{1/2}}(1+i)^{-2},$$

da cui si ricava

$$R = \frac{(1+i)^2}{a_{\overline{4}|1_{1/2}}}\left(20\,000 - 1\,000 a_{\overline{12}|1_{1/6}}\right).$$

Dato che

$$i_{1/6} = 1.05^{1/6} - 1 = 0.008164846 \quad \text{e} \quad i_{1/2} = 1.05^{1/2} - 1 = 0.024695076,$$

si ottiene $R = 2\,522.40$.

Con la rata mensile di 500 per poter restituire il debito occorre che

$$500 \cdot a_{\overline{n}|i_{1/12}} \geq 20\,000.$$

La disequazione equivale a

$$a_{\overline{n}|i_{1/12}} \geq 40 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-(1+i_{1/12})^{-n}}{i_{1/12}} \geq 40 \quad \Leftrightarrow \quad (1+i_{1/12})^{-n} \leq 1 - 40 i_{1/12}.$$

Da questa, applicando i logaritmi, si ricava

$$-n\ln(1+i_{1/12}) \leq \ln(1-40i_{1/12}) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1-40i_{1/12})}{\ln(1+i_{1/12})} = 43.75.$$

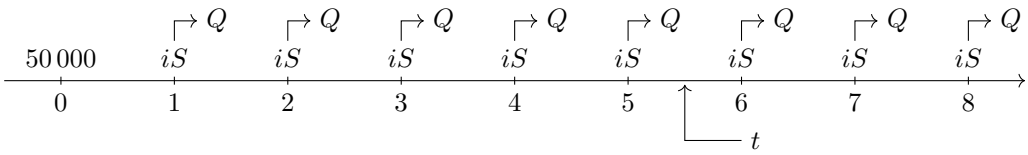
Quindi servono 44 rate mensili (l'ultima di importo inferiore a 500).

ESERCIZIO 2. Un prestito di 50 000 viene restituito in 8 rate annue posticipate con un ammortamento americano a due tassi. Per quanto riguarda gli interessi, pagati anch'essi in via posticipata, il tasso di remunerazione concordato è del 7%. Per la restituzione del capitale, la banca presso la quale vengono depositate le quote di accumulazione offre un tasso del 3%. Si determini l'ammontare della quota interessi I e della quota di accumulazione Q. Si calcoli il fondo di accumulazione dopo 5 anni e mezzo. Si scriva l'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo dell'ammortamento e si dica se questo tasso è maggiore o minore del 7%.

✎

Indicando con $S = 50\,000$ l'ammontare del prestito e con $i = 0.07$ il tasso di remunerazione, la quota interessi I è costante ed è uguale agli interessi annui sull'intero debito. Quindi si ha

$$I = iS = 0.07 \cdot 50\,000 = 3\,500.$$



Indicando con Q la quota di accumulazione, anch'essa costante, e con $i^\star = 0.03$ il tasso di accumulazione, Q si determina in modo che il montante delle 8 quote sia uguale al capitale mutuato. Quindi essa deve soddisfare l'equazione

$$Q\mathrm{a}_{\overline{8}|i^\star}(1+i^\star)^8 = S,$$

da cui

$$Q = \frac{S}{\mathrm{a}_{\overline{8}|i^\star}(1+i^\star)^8} = \frac{50\,000}{\mathrm{a}_{\overline{8}|0.03}(1+0.03)^8} = 5\,622.82.$$

Pertanto la rata di ammortamento (anch'essa costante) è

$$R = Q + I = 3\,500.27 + 5\,622.82 = 9\,122.82.$$

Il fondo di accumulazione F_t dopo 5 anni e mezzo è il valore delle quote di accumulazione già versate dopo 5 anni e mezzo, cioè all'epoca $t = 5.5$. Dato che all'epoca t sono state versate 5 quote di accumulazione, si ha

$$F_t = Q\mathrm{a}_{\overline{5}|i^\star}(1+i^\star)^t = 5\,622.82\mathrm{a}_{\overline{5}|0.03}(1+0.03)^{5.5} = 30\,296.79.$$

L'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo i_{eff} dell'ammortamento è

$$S = R\mathrm{a}_{\overline{8}|i_{\text{eff}}} \quad \text{cioè} \quad 50\,000 = 9\,122.82\mathrm{a}_{\overline{8}|i_{\text{eff}}}.$$

Per stabilire se il tasso effettivo è maggiore o minore del 7% basta calcolare qual è il valore attuale delle 8 rate dell'ammortamento al tasso del 7% e confrontarlo con 50 000. Si trova

$$R \cdot \mathrm{a}_{\overline{8}|0.07} = 9\,122.82\mathrm{a}_{\overline{8}|0.07} = 54\,475.08.$$

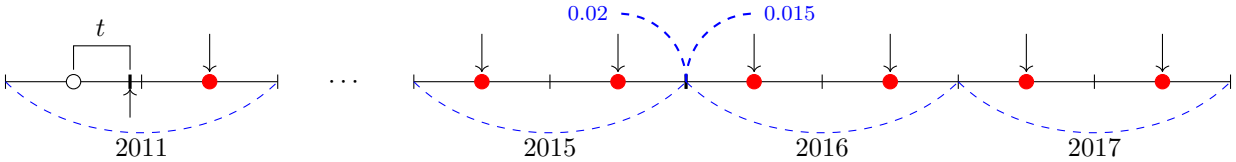
Dato che il tasso effettivo sconta più del tasso del 7%, significa che il tasso effettivo è maggiore del 7%.

ESERCIZIO 3. Un B.T.P. decennale con scadenza il 01/10/2017 paga cedole il 01/04 e il 01/10 al tasso cedolare $r = 3.5\%$. Verrà rimborsato alla pari. Il 15/06/2011 presentava un tasso di rendimento a scadenza $ytm = 3\%$. Si determini il prezzo tel quel P_{tq} e il corso secco P_s in quella data. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Ipotizzando di aver acquistato il titolo in data 15/06/2011, di tenerlo fino alla scadenza e di aver dato disposizione di reinvestire le cedole su un conto corrente, dove il tasso di interesse a credito è stato del 2% fino al 31/12/2015 ed è ora del 1.5%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

✎

La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P.



Non c'è tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.035}{2} \cdot 100 = 1.75.$$

Il calcolo del numero di cedole: in tutto sono $n = 13$. Il tempo t tra la cedola precedente e l'acquisto: si ha $t = 30 + 30 + 15 = 75$ giorni.

Serve anche convertire il tasso di rendimento a scadenza nell'equivalente tasso semestrale. Si ha

$$ytm_{1/2} = (1 + ytm)^{1/2} - 1 = 1.03^{1/2} - 1 = 0.014889156.$$

Il prezzo tel quel del titolo è dato da

$$P_{\text{tq}} = \left(1.75\text{a}_{\overline{13}|ytm_{1/2}} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-13}\right) \cdot (1 + ytm)^{75/360} = 103.70.$$

Il rateo è dato da

$$\text{rateo} = 1.75 \cdot \frac{75}{180} = 0.73$$

e quindi il corso secco P_s è

$$P_s = P_{\text{tq}} - \text{rateo} = 103.70 - 0.729 = 102.97.$$

Passiamo al calcolo del rendimento effettivo a seguito del reinvestimento delle cedole. Dobbiamo uguagliare il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo con il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/10/2017, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{6+105/360}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni. Dal 15/06/2011 al 01/10/2017 sono 6 anni e 105 giorni (ma si poteva anche fare 6.5 anni meno 75 giorni).

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2015, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 9 cedole da valutare al tasso $i^1 = 2\%$ (montante M_1) e le restanti 4 cedole al tasso $i^2 = 1.5\%$ (montante M_2).

Servono i tassi semestrali equivalenti:

$$i^1_{1/2} = 0.009950493 \quad \text{e} \quad i^2_{1/2} = 0.007472083.$$

Quindi

$$M_1 = 1.75 \cdot \text{a}_{\overline{9}|i^1_{1/2}}(1 + i^1_{1/2})^{9+90/180} \cdot (1 + i^2)^{1+9/12} = 16.90785166$$

e

$$M_2 = 1.75 \cdot \text{a}_{\overline{4}|i^2_{1/2}}(1 + i^2_{1/2}) \cdot (1 + i^2_{1/2})^3 = 7.078848435.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{6+105/360} = M_1 + M_2 + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = 0.028805302.$$

ESERCIZIO 4. Si considerino le seguenti due obbligazioni decennali:

A. acquisto a 100, cedole annue di 4, rimborso a 102;

B. acquisto a 90, cedole annue di 3, rimborso a 100.

Si faccia una valutazione delle due obbligazioni in base al criterio del REA, fissando un tasso di reinvestimento (annuo) $i_0 = 2\%$. Nell'ipotesi che il prezzo dell'obbligazione B diminuisca, fino a che valore del suo prezzo la valutazione porta allo stesso risultato precedente? Valutare infine le due obbligazioni in base al criterio del TIR usando un tasso (annuo) di prova $i_1 = 4.2\%$ (senza calcolare il TIR delle due operazioni).

✎

$$A. \quad \begin{array}{ccccc} -100 & 4 & 4 & \dots & 4+102 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \cdots & 10 \end{array} \qquad B. \quad \begin{array}{ccccc} -90 & 3 & 3 & \dots & 3+100 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \cdots & 10 \end{array}$$

I REA delle due obbligazioni sono

$$\text{REA}_A(0.02) = -100 + 4\text{a}_{\overline{10}|0.02} + 102(1 + 0.02)^{-10} = 19.61$$

e

$$\mathrm{REA}_B(0.02) = -90 + 3\mathrm{a}_{\overline{10}|0.02} + 100(1+0.02)^{-10} = 18.98.$$

Se il prezzo dell'obbligazione B diminuisce, aumenta nella stessa misura il suo REA. Per raggiungere la parità dei REA il prezzo di B deve diminuire in misura della differenza

$$19.61 - 18.98 = 0.63$$

e quindi la convenienza di A si ha fino a che il prezzo di B raggiunge il valore

$$90 - 0.63 = 89.37.$$

Al tasso di prova $i_1 = 4.2\%$ abbiamo

$$\mathrm{REA}_A(0.042) = -100 + 4\mathrm{a}_{\overline{10}|0.042} + 102(1+0.042)^{-10} = -0.28$$

e

$$\mathrm{REA}_B(0.042) = -90 + 3\mathrm{a}_{\overline{10}|0.042} + 100(1+0.042)^{-10} = 0.36.$$

Pertanto, dato che le due funzioni REA sono decrescenti al crescere del tasso, possiamo affermare che $\mathrm{TIR}_A < 0.042$ e invece $\mathrm{TIR}_B > 0.042$ e di conseguenza avremo che $\mathrm{TIR}_B > \mathrm{TIR}_A$.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 29/01/2016

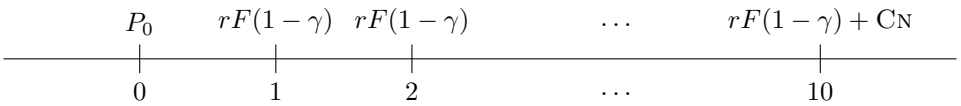
ESERCIZIO 1. Data l'obbligazione con le seguenti caratteristiche:
- valore facciale $F = 100$;
- scadenza tra 10 anni;
- rimborso, sopra la pari, $C = 103$;
- cedole annue con tasso cedolare $r = 3.5\%$;
- valore di emissione $P_0 = 101.50$,

trovare una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza *ytm* all'emissione, considerando la tassazione. Nell'ipotesi poi che tra due anni, immediatamente dopo il pagamento della seconda cedola, il tasso di rendimento a scadenza sia del 4%, si calcoli il prezzo tel quel P_{tq} del titolo, il rateo e il corso secco P_s in quella data, senza considerare questa volta la tassazione. Attraverso la duration, si dia infine, in quella stessa data, un'approssimazione della variazione del prezzo del titolo a seguito di una variazione del tasso di interesse di mezzo punto percentuale in più o in meno.

✎

Ponendo $F = 100$, $r = 0.035$, $C = 103$, $P_0 = 101.50$ e $n = 10$, dovendo considerare la tassazione con la consueta aliquota del 12.50% ($\gamma = 0.125$), abbiamo che la cedola netta è data da $rF(1-\gamma) = 3.0625$ e il rimborso netto è dato da

$$\text{C}_\text{N} = C - (C - P_0)\gamma = 102.8125.$$



Pertanto la formula per una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza fornisce

$$ytm_0 = \frac{rF(1-\gamma) + (\text{C}_\text{N} - P_0)/n}{(\text{C}_\text{N} + 2P_0)/3} = 0.031330472.$$

Passiamo alla seconda domanda. Il prezzo tel quel fra due anni è il valore attuale degli importi ancora da incassare. Si tratta di 8 cedole (la valutazione è immediatamente dopo il pagamento della seconda cedola) e del valore di rimborso. Dato che questa volta non consideriamo la tassazione, si ha

$$P_{\text{tq}} = rF\text{a}_{\overline{8}|0.04} + C(1+0.04)^{-8} = 3.5\text{a}_{\overline{8}|0.04} + 103(1+0.04)^{-8} = 98.83.$$

Banalmente, dato che l'istante di valutazione coincide con lo stacco dell'ultima cedola non riscossa, si ha che il rateo è nullo e il corso secco P_s coincide con il prezzo tel quel P_{tq}.

Per trovare un'approssimazione della variazione del prezzo del titolo a seguito di una variazione del tasso di interesse di mezzo punto percentuale in più o in meno la formula è

$$\Delta P = -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P_{\text{tq}}.$$

Dobbiamo intanto calcolare la duration nell'istante di valutazione (fra due anni). Usiamo la formula che utilizza l'increasing annuity.[2]

[2] Ricordo che la increasing annuity è per definizione il valore attuale di una rendita unitaria in progressione aritmetica di ragione unitaria, cioè di rate $1, 2, 3, \dots, n$ ed è data da

$$I\text{a}_{\overline{n}|i} = \text{a}_{\overline{n}|i} + \frac{\text{a}_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\text{a}_{\overline{n}|i}(1+i) - n(1+i)^{-n}}{i}.$$

Nel nostro caso abbiamo

$$I\text{a}_{\overline{8}|0.04} = \text{a}_{\overline{8}|0.04} + \frac{\text{a}_{\overline{8}|0.04} - 8(1+0.04)^{-8}}{0.04} = 28.91332575.$$

$$D = \frac{rF \cdot Ia_{\overline{m}|i} + nC(1+i)^{-n}}{rF \cdot a_{\overline{m}|i} + C(1+i)^{-n}} = \frac{3.5 \cdot Ia_{\overline{8}|0.04} + 8 \cdot 103(1+0.04)^{-8}}{3.5 \cdot a_{\overline{8}|0.04} + 103(1+0.04)^{-8}} = 7.12.$$

Ci serve ora la "duration modificata"

$$D_{\text{mod}} = \frac{D}{1+i} = \frac{D}{1.04} = 6.85.$$

Pertanto la variazione del prezzo è data da

$$\Delta P = -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P_{\text{tq}} = -6.85 \cdot 0.005 \cdot 98.83 = -3.38,$$

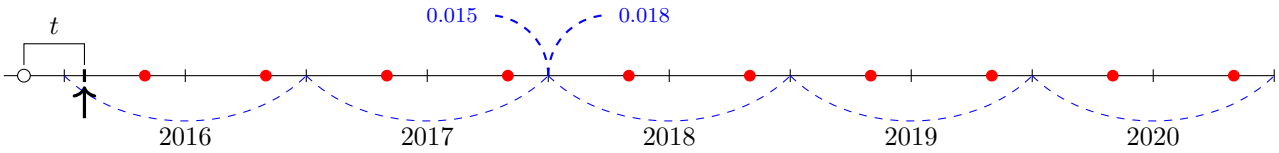
che significa che in corrispondenza di una variazione del tasso di interesse di mezzo punto percentuale in più si ha una variazione del prezzo pari a 3.38 unità in meno (e viceversa).

ESERCIZIO 2. In data 31/01/2016 acquisto un B.T.P. che paga cedole il 01/05 e il 01/11 con tasso cedolare $r = 2.5\%$ e scadrà il 01/11/2020. Verrà rimborsato alla pari. Il tasso annuo di rendimento a scadenza è $ytm = 2.2\%$. Si determini il prezzo tel quel P_{tq} e il corso secco P_s alla data di acquisto. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Nell'ipotesi di tenere il titolo fino alla scadenza e di reinvestire le cedole su un conto corrente, dove il tasso di interesse a credito sarà dell'1.5% fino al 31/12/2017 e successivamente dell'1.8%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento.

✎

La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P.



Non c'è tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.025}{2} \cdot 100 = 1.25.$$

Il calcolo del numero di cedole: due ogni anno dal 2016 al 2020, in tutto sono $n = 10$.

Il tempo t trascorso dallo stacco dell'ultima cedola: si ha $t = 30 + 30 + 30 = 90$ giorni.

Serve anche convertire il tasso di rendimento a scadenza nell'equivalente tasso semestrale. Si ha

$$ytm_{1/2} = (1 + ytm)^{1/2} - 1 = 1.022^{1/2} - 1 = 0.010940156.$$

Il prezzo tel quel del titolo è dato da

$$P_{\text{tq}} = 1.25 a_{\overline{10}|ytm_{1/2}}(1 + ytm)^{90/360} + 100(1 + ytm)^{-5+90/360} = 102.023.$$

Il rateo è dato da

$$\text{rateo} = 1.25 \cdot \frac{90}{180} = 0.625$$

e quindi il corso secco P_s è

$$P_s = P_{\text{tq}} - \text{rateo} = 102.023 - 0.625 = 101.398.$$

Passiamo al calcolo del rendimento effettivo a seguito del reinvestimento delle cedole. Dobbiamo uguagliare il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo al valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/11/2020, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{5-3/12}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2017, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 4 cedole da valutare al tasso $i^1 = 1.5\%$ (montante M_1) e le restanti 6 cedole al tasso $i^2 = 1.8\%$ (montante M_2).

Servono i tassi semestrali equivalenti:

$$i^1_{1/2} = 0.007472083 \quad \text{e} \quad i^2_{1/2} = 0.00895986.$$

Quindi

$$M_1 = 1.25 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|i^1_{1/2}}(1+i^1)^{2/12+2} \cdot (1+i^2)^{2+10/12} = 5.331682637$$

e

$$M_2 = 1.25 \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|i^2_{1/2}}(1+i^2_{1/2}) \cdot (1+i^2)^{5/2} = 7.670017904.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\mathrm{tq}}(1+i_{\mathrm{eff}})^{5-3/12} = M_1 + M_2 + 100,$$

da cui si ricava

$$i_{\mathrm{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{P_{\mathrm{tq}}}\right)^{1/(5-3/12)} - 1 = 0.021756235.$$

ESERCIZIO 3. Si considerino i due seguenti progetti finanziari:

A.	-100	10	20	40	40	B.	-100	20	30	10	50
	0	1	2	3	4		0	1	2	3	4

dove gli importi sono espressi in migliaia di euro.

Si valutino i due progetti in base al criterio del REA, ipotizzando un tasso esterno del 3.3%, specificando poi quale risulta conveniente. I due progetti sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro a questo stesso tasso?

Si dica se il TIR del secondo progetto è maggiore o minore del 3.5%.

Possiamo infine affermare che esiste un tasso finanziariamente accettabile per cui i due progetti sono equivalenti in base al criterio del REA?

✎

Manteniamo per comodità la scrittura degli importi in migliaia di euro. Nell'ipotesi di un tasso esterno $i_0 = 3.3\%$ abbiamo

$$\mathrm{REA}_A(0.033) = -100 + \frac{10}{1+i_0} + \frac{20}{(1+i_0)^2} + \frac{40}{(1+i_0)^3} + \frac{40}{(1+i_0)^4} = -0.16$$

e

$$\mathrm{REA}_B(0.033) = -100 + \frac{20}{1+i_0} + \frac{30}{(1+i_0)^2} + \frac{10}{(1+i_0)^3} + \frac{50}{(1+i_0)^4} = 0.46.$$

Risulta conveniente il progetto B. Rispetto all'investimento di denaro il progetto A non risulta conveniente, il progetto B sì.

Il TIR di B è il tasso i che soddisfa l'equazione

$$100 = \frac{20}{1+i} + \frac{30}{(1+i)^2} + \frac{10}{(1+i)^3} + \frac{50}{(1+i)^4}.$$

Non è agevole risolvere questa equazione, dato che si tratta di un'equazione di quarto grado e per avere una soluzione approssimata dovremmo ricorrere a metodi iterativi, come il metodo di bisezione o il metodo di Newton. È richiesto solo di dire se il TIR è maggiore o minore del 3.5%. Possiamo quindi calcolare il termine di destra in $i = 3.5\%$. Si ha

$$\frac{20}{1.035} + \frac{30}{(1.035)^2} + \frac{10}{(1.035)^3} + \frac{50}{(1.035)^4} = 99.92$$

e quindi, considerando che la funzione è decrescente e che il valore ottenuto è minore di 100, possiamo affermare che il TIR è minore del 3.5%.

Passiamo all'ultima domanda, sull'esistenza di un tasso finanziariamente accettabile per cui i due progetti sono equivalenti in base al criterio del REA. L'equazione è

$$-100 + \frac{10}{1+i} + \frac{20}{(1+i)^2} + \frac{40}{(1+i)^3} + \frac{40}{(1+i)^4} = -100 + \frac{20}{1+i} + \frac{30}{(1+i)^2} + \frac{10}{(1+i)^3} + \frac{50}{(1+i)^4},$$

che, con banali semplificazioni e con il cambio di variabile $\frac{1}{1+i} = v$, equivale a

$$10v + 20v^2 + 40v^3 + 40v^4 = 20v + 30v^2 + 10v^3 + 50v^4 \quad \Leftrightarrow \quad v + v^2 - 3v^3 + v^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v(1 + v - 3v^2 + v^3) = 0.$$

L'equazione ha due soluzioni immediate: $v = 0$ oppure $v = 1$, che però sono fattori di sconto che, rispettivamente, non portano ad alcun tasso di interesse oppure al tasso di interesse nullo, che riteniamo non finanziariamente significativo. Ricordando semplici tecniche studiate nel corso di Matematica l'equazione può essere scritta nella forma

$$v(v-1)(v^2 - 2v - 1) = 0$$

e quindi le soluzioni mancanti si trovano risolvendo $v^2 - 2v - 1 = 0$, che sono $v = 1 \pm \sqrt{2}$. Una è un valore negativo, non accettabile, l'altra è un valore maggiore di 1, analogamente non finanziariamente accettabile.

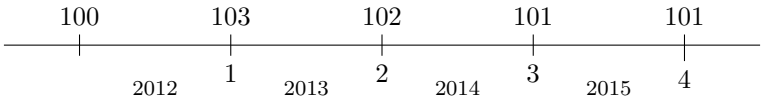
Quindi possiamo affermare che non esiste un tasso di interesse per cui i due progetti sono equivalenti in base al criterio del REA.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 29/01/2016

ESERCIZIO 1. Il 01/01/2012 sono stati investiti 10 000 per 4 anni al tasso di interesse $i = 3\%$ in RIC. Supponendo che gli indici dei prezzi (ponendo convenzionalmente a 100 l'indice a inizio 2012) siano stati 103 a fine 2012, 102 a fine 2013, 101 a fine 2014 e 101 a fine 2015, determinare:

1. i tassi di variazione dei prezzi nei 4 anni (g_{2012}, g_{2013}, g_{2014} e g_{2015});
2. il tasso medio $\overline{g}$ di variazione dei prezzi nei 4 anni (su base annua);
3. il tasso di interesse reale annuo dell'investimento;
4. l'investimento iniziale che avrebbe prodotto in termini reali lo stesso montante.

✎



1. I tassi di variazione dei prezzi nei 4 anni sono:

$$g_{2012} = \frac{103-100}{100} = 0.03 \quad , \quad g_{2013} = \frac{102-103}{103} = -0.009708737$$

$$g_{2014} = \frac{101-102}{102} = -0.009803921 \quad , \quad g_{2015} = \frac{101-101}{101} = 0.$$

2. Il tasso medio $\overline{g}$ di variazione dei prezzi nei 4 anni su base annua è dato dalla soluzione dell'equazione

$$(1+g_{2012})(1+g_{2013})(1+g_{2014})(1+g_{2015}) = (1+\overline{g})^4,$$

che è

$$\overline{g} = (\ldots)^{1/4} - 1 = 0.002490679.$$

Si poteva anche arrivare al risultato con

$$\overline{g} = \left(\frac{101-100}{100}+1\right)^{1/4} - 1 = 0.002490679.$$

3. Il tasso di interesse reale annuo dell'investimento è

$$i_r = \frac{i-\overline{g}}{1+\overline{g}} = 0.027440974.$$

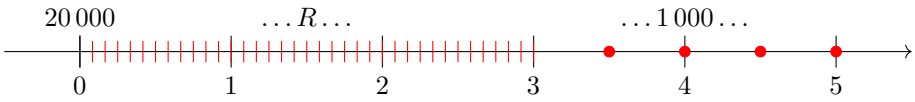
4. L'investimento iniziale che avrebbe prodotto in termini reali lo stesso montante è

$$C_0' = C_0(1+\overline{g})^4 = C_0 \cdot 1.01 = 10\,100.$$

ESERCIZIO 2. Voglio restituire un prestito di 20 000 in 5 anni, i primi tre anni mediante rate mensili costanti posticipate e per i restanti due anni mediante rate semestrali costanti posticipate di 1 000 ciascuna. Nell'ipotesi che il tasso di interesse annuo applicato sia $i = 7\%$, si determini l'ammontare della rata mensile.

Nell'ipotesi invece di voler pagare una rata trimestrale posticipata di 1600, con quante rate, allo stesso tasso, posso restituire il prestito?

✎



Abbiamo 36 rate mensili, di importo incognito R, e 4 rate semestrali da 1 000. Data la cadenza delle rate, servono i tassi di interesse equivalenti mensile e semestrale

$$i_{1/12} = 0.005654145 \quad \text{e} \quad i_{1/2} = 0.034408043.$$

L'ammontare della rata R deve soddisfare l'equazione seguente:

$$20\,000 = R \cdot \mathrm{a}_{\overline{36}|i_{1/12}} + 1\,000 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|i_{1/2}}(1+i)^{-3},$$

dalla quale si ricava

$$R = \frac{20\,000 - 1\,000 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|i_{1/2}}(1+i)^{-3}}{\mathrm{a}_{\overline{36}|i_{1/12}}} = 523.16.$$

Passiamo alla seconda domanda. Dobbiamo trovare il numero di rate trimestrali che permettono di restituire l'importo preso a prestito. Serve anzitutto il tasso equivalente trimestrale $i_{1/4} = 0.017058525$. La disequazione che esprime la capacità di rimborso è

$$1\,600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{n}|i_{1/4}} \geq 20\,000.$$

Questa equivale a

$$\mathrm{a}_{\overline{n}|i_{1/4}} \geq 12.5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-(1+i_{1/4})^{-n}}{i_{1/4}} \geq 12.5 \quad \Leftrightarrow \quad (1+i_{1/4})^{-n} \leq 1 - 12.5 i_{1/4}.$$

Da questa, applicando i logaritmi, si ricava

$$-n\ln(1+i_{1/4}) \leq \ln(1-12.5i_{1/4}) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1-12.5i_{1/4})}{\ln(1+i_{1/4})} = 14.2.$$

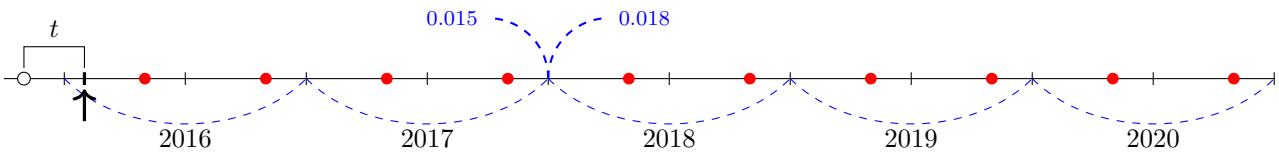
Quindi servono 15 rate trimestrali (l'ultima di importo inferiore a 1 600).

ESERCIZIO 3. In data 31/01/2016 acquisto un B.T.P. che paga cedole il 01/05 e il 01/11 con tasso cedolare $r = 2.5\%$ e scadrà il 01/11/2020. Verrà rimborsato alla pari. Il tasso annuo di rendimento a scadenza è $ytm = 2.2\%$. Si determini il prezzo tel quel P_{tq} e il corso secco P_s alla data di acquisto. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Nell'ipotesi di tenere il titolo fino alla scadenza e di reinvestire le cedole su un conto corrente, dove il tasso di interesse a credito sarà dell'1.5% fino al 31/12/2017 e successivamente dell'1.8%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento.

✎

Ecco la rappresentazione che mostra le caratteristiche del B.T.P.



Non c'è tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.025}{2} \cdot 100 = 1.25.$$

Il calcolo del numero di cedole: due ogni anno dal 2016 al 2020, in tutto sono $n = 10$.

Il tempo t trascorso dallo stacco dell'ultima cedola: si ha $t = 30 + 30 + 30 = 90$ giorni.

Serve anche convertire il tasso di rendimento a scadenza nell'equivalente tasso semestrale. Si ha

$$ytm_{1/2} = (1 + ytm)^{1/2} - 1 = 1.022^{1/2} - 1 = 0.010940156.$$

Il prezzo tel quel del titolo è dato da

$$P_{\text{tq}} = 1.25\text{a}_{\overline{10}|ytm_{1/2}}(1 + ytm)^{90/360} + 100(1 + ytm)^{-5+90/360} = 102.023.$$

Il rateo è dato da

$$\text{rateo} = 1.25 \cdot \frac{90}{180} = 0.625$$

e quindi il corso secco P_s è

$$P_s = P_{\text{tq}} - \text{rateo} = 102.023 - 0.625 = 101.398.$$

Passiamo al calcolo del rendimento effettivo a seguito del reinvestimento delle cedole. Dobbiamo uguagliare il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo al valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/11/2020, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{5-3/12}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2017, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 4 cedole da valutare al tasso $i^1 = 1.5\%$ (montante M_1) e le restanti 6 cedole al tasso $i^2 = 1.8\%$ (montante M_2).

Servono i tassi semestrali equivalenti:

$$i^1_{1/2} = 0.007472083 \quad \text{e} \quad i^2_{1/2} = 0.00895986.$$

Quindi

$$M_1 = 1.25 \cdot \text{a}_{\overline{4}|i^1_{1/2}}(1 + i^1)^{2/12+2} \cdot (1 + i^2)^{2+10/12} = 5.331682637$$

e

$$M_2 = 1.25 \cdot \text{a}_{\overline{6}|i^2_{1/2}}(1 + i^2_{1/2}) \cdot (1 + i^2)^{5/2} = 7.670017904.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{5-3/12} = M_1 + M_2 + 100,$$

da cui si ricava

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(5-3/12)} - 1 = 0.021756235.$$

ESERCIZIO 4. Relativamente all'acquisto di un immobile del valore di 200 000 abbiamo queste due alternative di pagamento:

A. pagare subito con uno sconto del 6%;

B. pagare subito 100 000 e successivamente 4 rate annuali (posticipate), le prime 3 da 30 000 e l'ultima da 20 000.

Ipotizzando un tasso esterno annuo del 10%, quale delle due modalità conviene in base al criterio del REA/VAN? Quale deve essere il tasso dello sconto affinché le due modalità siano indifferenti in base al REA? Dire infine se il tasso esterno di interesse per cui le due modalità sono indifferenti supera l'11%.

✎

L'alternativa A prevede il versamento dell'importo $200\,000(1-0.06) = 188\,000$ e quindi

$$\mathrm{REA}_A = -188\,000.$$

Per l'alternativa B si ha

$$\mathrm{REA}_B(0.1) = -100\,000 - 30\,000\mathrm{a}_{\overline{3}|0.1} - 20\,000(1+0.1)^{-4} = -188\,265.83.$$

Quindi in base al criterio del REA, al tasso ipotizzato, conviene l'alternativa A.

Per trovare il tasso di sconto d che rende equivalenti in base al REA le due modalità basta impostare l'equazione

$$-200\,000(1-d) = -188\,265.83, \text{ che fornisce } d = 0.05867085.$$

Il tasso esterno di interesse per cui le due modalità sono indifferenti è il tasso per cui le due modalità hanno lo stesso valore attuale, quindi è il tasso i che soddisfa l'equazione

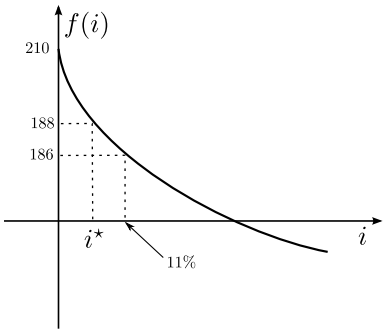
$$188\,000 = 100\,000 + 30\,000\mathrm{a}_{\overline{3}|i} + 20\,000(1+i)^{-4}.$$

Con la solita tecnica del "tasso di prova", in questo caso dell'11%, si trova che il termine di destra vale 186 486.06, minore di 188 000. Nella figura a fianco è rappresentata la situazione, dove ho indicato con f la funzione

$$f(i) = 100 + 30\mathrm{a}_{\overline{3}|i} + 20(1+i)^{-4}$$

(ho espresso in migliaia gli importi e, per comodità, non ho rispettato la scala dei valori). Si noti che possiamo essere certi del fatto che la funzione f è decrescente all'aumentare del tasso i.

La figura mostra che pertanto questo tasso esterno $i^\star$ risulta minore dell'11%.

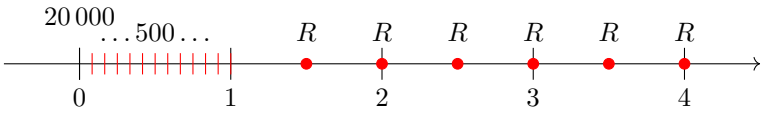


ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 13/06/2016

ESERCIZIO 1. Devo restituire un prestito di 20 000 in quattro anni, il primo anno mediante rate mensili costanti posticipate di 500 e nei restanti tre anni mediante rate semestrali costanti posticipate. Nell'ipotesi che il tasso di interesse annuo applicato sia $i = 4\%$, si determini l'ammontare della rata semestrale.

Nell'ipotesi di poter scegliere, per gli ultimi tre anni, tra la modalità indicata e il pagamento di 4 000 alla fine del secondo anno, 5 000 alla fine del terzo e 6 000 alla fine del quarto, si dica se questa alternativa è conveniente rispetto all'altra, scegliendo un opportuno criterio di valutazione.

✎



Il prestito viene restituito attraverso 12 rate mensili posticipate di 500 e successivamente 6 rate semestrali anch'esse posticipate di importo R, da determinare. Il tasso di interesse annuo è $i = 0.04$. Data la cadenza delle rate, servono i tassi di interesse equivalenti mensile e semestrale

$$i_{1/12} = (1 + 0.04)^{1/12} - 1 = 0.00327374 \quad \text{e} \quad i_{1/2} = (1 + 0.04)^{1/2} - 1 = 0.019803903.$$

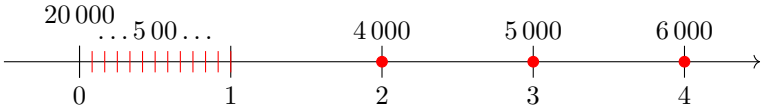
L'ammontare della rata R deve soddisfare l'equazione seguente:

$$20\,000 = 500 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} + R \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|i_{1/2}}(1 + i)^{-1},$$

dalla quale si ricava

$$R = \frac{20\,000 - 500 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}}{\mathrm{a}_{\overline{6}|i_{1/2}}(1 + i)^{-1}} = 2\,620.95.$$

Passiamo alla seconda domanda. Qui è raffigurata la modalità alternativa di rimborso.



Per stabilire se questa modalità è conveniente rispetto all'altra possiamo calcolare il valore attuale dei versamenti fatti con questa modalità. Si ha

$$V_0' = 500 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} + 4\,000(1 + i)^{-2} + 5\,000(1 + i)^{-3} + 6\,000(1 + i)^{-4} = 19\,146.28 < 20\,000.$$

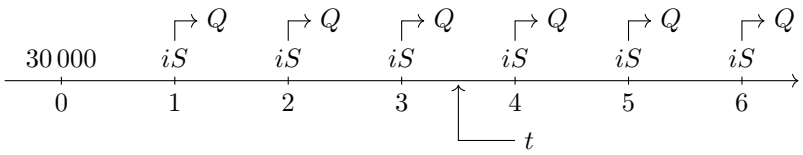
Quindi la modalità alternativa è conveniente rispetto alla prima.

ESERCIZIO 2. Un prestito di 30 000 viene restituito in 6 rate annue posticipate con un ammortamento americano a due tassi. Per quanto riguarda gli interessi, pagati anch'essi in via posticipata, il tasso di remunerazione concordato è del 6%. Per la restituzione del capitale, la banca presso la quale vengono depositate le quote di accumulazione offre un tasso del 2%. Si determini l'ammontare della rata di ammortamento R. Si calcoli il fondo di accumulazione dopo 3 anni e mezzo. Si scriva l'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo dell'ammortamento e si dica se questo tasso è maggiore o minore del 7%.

✎

Indicando con $S = 30\,000$ l'ammontare del prestito e con $i = 0.06$ il tasso di remunerazione, la quota interessi I è costante ed è uguale agli interessi annui sull'intero debito. Quindi si ha

$$I = iS = 0.06 \cdot 30\,000 = 1\,800.$$



Indicando con Q la quota di accumulazione, anch'essa costante, e con $i^\star = 0.02$ il tasso di accumulazione, Q si determina in modo che il montante delle 6 quote sia uguale al capitale mutuato. Quindi essa deve soddisfare l'equazione

$$Q \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|i^\star}(1+i^\star)^6 = S,$$

da cui

$$Q = \frac{S}{\mathrm{a}_{\overline{6}|i^\star}(1+i^\star)^6} = \frac{30\,000}{\mathrm{a}_{\overline{6}|0.06}(1+0.06)^6} = 4\,755.77.$$

Pertanto la rata di ammortamento (anch'essa costante) è

$$R = Q + I = 1\,800 + 4\,755.77 = 6\,555.77.$$

Il fondo di accumulazione F_t dopo 3 anni e mezzo è il valore delle quote di accumulazione già versate dopo 3 anni e mezzo, cioè all'epoca $t = 3.5$. Dato che all'epoca t sono state versate 3 quote di accumulazione, si ha

$$F_t = Q \cdot \mathrm{a}_{\overline{3}|i^\star}(1+i^\star)^t = 4\,755.77 \cdot \mathrm{a}_{\overline{3}|0.02}(1+0.02)^{3.5} = 14\,699.38.$$

L'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo i_{eff} dell'ammortamento è

$$S = R \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|i_{\text{eff}}} \quad \text{cioè} \quad 30\,000 = 6\,555.77 \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|i_{\text{eff}}}.$$

Per stabilire se il tasso effettivo è maggiore o minore del 7% basta calcolare qual è il valore attuale delle 6 rate dell'ammortamento al tasso del 7% e confrontarlo con 30 000. Si trova

$$R \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|0.07} = 6\,555.77 \cdot \frac{1-(1+0.07)^{-6}}{0.07} = 31\,248.34.$$

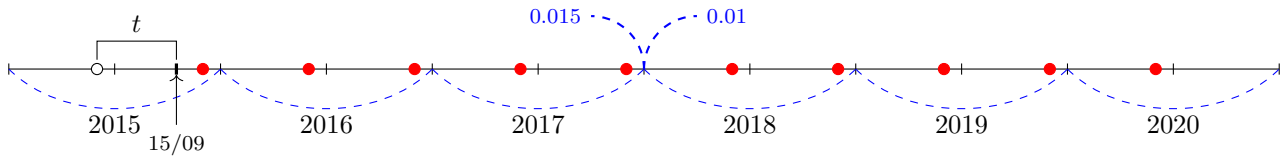
Dato che il tasso effettivo sconta più del tasso del 7%, significa che il tasso effettivo è maggiore del 7%.

ESERCIZIO 3. Un B.T.P. decennale con scadenza il 01/06/2020 paga cedole il 01/12 e il 01/06 al tasso cedolare $r = 2.5\%$. Verrà rimborsato alla pari. Il 15/09/2015 presentava un tasso di rendimento a scadenza $ytm = 3\%$. Si determini il prezzo tel quel P_{tq} e il corso secco P_s in quella data. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Ipotizzando di aver acquistato il titolo in data 15/09/2015, di tenerlo fino alla scadenza e di reinvestire le cedole su un conto corrente dove il tasso di interesse a credito sarà dell'1.5% fino al 31/12/2017 e poi passerà all'1%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

✎

Ecco la rappresentazione che mostra le caratteristiche del B.T.P.



Non c'è tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.025}{2} \cdot 100 = 1.25.$$

Il calcolo del numero di cedole: una nel 2015, due dal 2016 al 2019 e una nel 2020: in tutto sono $n = 10$.

Il tempo t trascorso dallo stacco dell'ultima cedola: si ha $t = 15 + 30 + 30 + 30 = 105$ giorni.
Serve anche convertire il tasso di rendimento a scadenza nell'equivalente tasso semestrale. Si ha

$$ytm_{1/2} = (1 + ytm)^{1/2} - 1 = 1.03^{1/2} - 1 = 0.014899156.$$

Il prezzo tel quel del titolo è dato da

$$P_{\text{tq}} = \left[1.25 \cdot \mathrm{a}_{\overline{10}|ytm_{1/2}} + 100 \cdot (1 + ytm)^{-5}\right] \cdot (1 + ytm)^{105/360} = 98.64.$$

Il rateo è dato da

$$\text{rateo} = 1.25 \cdot \frac{105}{180} = 0.73$$

e quindi il corso secco P_s è

$$P_s = P_{\text{tq}} - \text{rateo} = 98.64 - 0.73 = 97.91.$$

Passiamo al calcolo del rendimento effettivo a seguito del reinvestimento delle cedole. Dobbiamo uguagliare il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo al valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/06/2020, data di scadenza del titolo.
Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{4+255/360}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.[3]
Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2017, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 5 cedole da valutare al tasso $i^{(1)} = 1.5\%$ (montante M_1) e le restanti 5 cedole al tasso $i^{(2)} = 1\%$ (montante M_2).
Servono i tassi semestrali equivalenti:

$$i^{(1)}_{1/2} = 0.007472083 \quad \text{e} \quad i^{(2)}_{1/2} = 0.004987562.$$

Quindi

$$M_1 = 1.25 \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|i^{(1)}_{1/2}} (1 + i^{(1)})^{2+7/12} \cdot (1 + i^{(2)})^{2+5/12} = 6.51$$

e

$$M_2 = 1.25 \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|i^{(2)}_{1/2}} \cdot (1 + i^{(2)}_{1/2}) \cdot (1 + i^{(2)})^2 = 1.25 \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|i^{(2)}_{1/2}} \cdot (1 + i^{(2)})^{5/2} = 6.31.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{4+255/360} = M_1 + M_2 + 100,$$

da cui si ricava

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(4+255/360)} - 1 = 0.029832.$$

ESERCIZIO 4. Si considerino i seguenti due progetti di investimento:

		0	1	2	3	4
A.		-150	-40	120	-20	130
B.		-120	70	-40	60	50

Ipotizzando un tasso esterno annuo del 7%, quale dei due progetti conviene in base al criterio del REA/VAN? I due progetti sono entrambi convenienti, in base allo stesso criterio, rispetto all'investimento di denaro al tasso indicato?
Successivamente si valutino i due progetti con il criterio T.R.M., nell'ipotesi che il tasso a debito sia $i_- = 8\%$ e il tasso a credito sia $i_+ = 4\%$ e si dica se in base a tale criterio sono convenienti.

✎

Calcoliamo i REA dei due progetti.

$$\text{REA}_A(0.07) = -150 - 40 \cdot 1.07^{-1} + 120 \cdot 1.07^{-2} - 20 \cdot 1.07^{-3} + 130 \cdot 1.07^{-4} = 0.2799$$

[3] Nel caso si preferisca usare il tasso semestrale $i_{\text{eff}_{1/2}}$, l'intervallo di tempo misura $9 + 75/180$ semestri.

e

$$\mathrm{REA}_B(0.07) = -120 + 70 \cdot 1.07^{-1} - 40 \cdot 1.07^{-2} + 60 \cdot 1.07^{-3} + 50 \cdot 1.07^{-4} = -2.3944.$$

Quindi in base al criterio del REA conviene il progetto A. I due progetti non sono entrambi convenienti: rispetto all'investimento di denaro al tasso indicato il progetto A è conveniente, ma B no.

Ora valutiamo i due progetti con il criterio T.R.M., dati i tassi a debito $i_- = 8\%$ e a credito $i_+ = 4\%$.

Per il progetto A abbiamo i seguenti saldi di cassa:

$$\begin{aligned}
M_0 &= -150 \\
M_1 &= -150(1+0.08) - 40 = -202 \\
M_2 &= -202(1+0.08) + 120 = -98.16 \\
M_3 &= -98.16(1+0.08) - 20 = -126.01 \\
M_4 &= -126.01(1+0.08) + 130 = -6.09.
\end{aligned}$$

Il progetto non è dunque conveniente, dato che il montante T.R.M. finale è negativo.

Per il progetto B abbiamo i seguenti saldi di cassa:

$$\begin{aligned}
M_0 &= -120 \\
M_1 &= -120(1+0.08) + 70 = -59.6 \\
M_2 &= -59.6(1+0.08) - 40 = -104.37 \\
M_3 &= -104.37(1+0.08) + 60 = -52.72 \\
M_4 &= -52.72(1+0.08) + 50 = -6.93.
\end{aligned}$$

Nemmeno il progetto B è conveniente. Tra i due comunque conviene A.

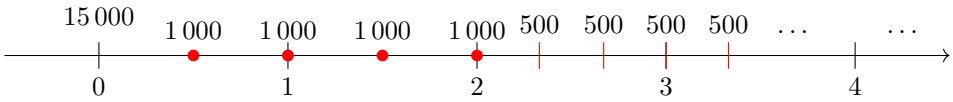
ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 09/09/2016

ESERCIZIO 1. Devo restituire un prestito di 15 000. Per i primi due anni pago rate semestrali posticipate di 1 000, successivamente posso pagare rate quadrimestrali posticipate di 500. Nell'ipotesi che il tasso di interesse annuo applicato sia $i = 5\%$, in quanto tempo e con quali modalità estinguerò il debito?

Scegliendo di sostituire il pagamento delle rate da 500 con il versamento di due soli importi S_3 e S_4 (rispettivamente al terzo e al quarto anno), con S_4 doppio di S_3, determinare l'ammontare di S_3 in modo che i due piani di versamenti siano equivalenti (stesso valore attuale).

✎

Ecco una rappresentazione delle scadenze dei pagamenti:



Poniamo $i = 5\%$. Data la periodicità delle rate, procuriamoci i tassi di interesse semestrale e quadrimestrale.

$$i_{1/2} = (1+i)^{1/2} - 1 = 0.024695076 \quad \text{e} \quad i_{1/3} = (1+i)^{1/3} - 1 = 0.016396356.$$

Indicando con n il numero (incognito) di rate quadrimestrali, affinché le rate dei pagamenti siano sufficienti a restituire il debito occorre che

$$1\,000 \cdot a_{\overline{4}|i_{1/2}} + 500 \cdot a_{\overline{n}|i_{1/3}}(1+i)^{-2} \geq 15\,000.$$

Da questa si ricava

$$a_{\overline{n}|i_{1/3}} \geq \frac{15\,000 - 1\,000 \cdot a_{\overline{4}|i_{1/2}}}{500} \cdot (1+i)^2.$$

Chiamando A la quantità a destra, si trova $A = 24.77375017$. Continuando con in calcoli si ha

$$a_{\overline{n}|i_{1/3}} \geq A \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-(1+i_{1/3})^{-n}}{i_{1/3}} \geq A \quad \Leftrightarrow \quad (1+i_{1/3})^{-n} \leq 1 - A \cdot i_{1/3}$$

da cui, applicando il logaritmo naturale, si ha

$$-n \leq \frac{\ln(1 - A \cdot i_{1/3})}{\ln(1+i_{1/3})} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1 - A \cdot i_{1/3})}{\ln(1+i_{1/3})} = 32.05.$$

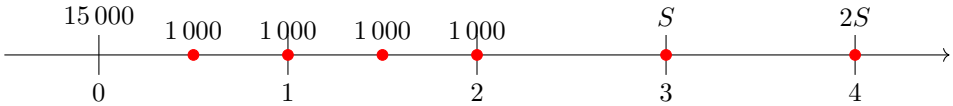
Questo risultato dice che per la restituzione del debito servono 32 rate quadrimestrali (10 anni e 8 mesi) da 500, con una rimanenza inferiore ai 500. Per il calcolo della rimanenza possiamo calcolare il valore attuale di tutte le rate intere, dato da

$$1\,000 \cdot a_{\overline{4}|i_{1/2}} + 500 \cdot a_{\overline{32}|i_{1/3}}(1+i)^{-2} = 14\,987.13.$$

La rimanenza è quindi data da

$$15\,000 - 14\,987.13 = 12.87 \text{ (se valutata in } t = 0) \text{ e } 12.87(1+i)^{12+8/12} = 23.87 \text{ (se valutata alla fine).}$$

Passiamo alla seconda domanda. Qui è raffigurata la modalità alternativa di rimborso, dove poniamo $S_3 = S$ e quindi $S_4 = 2S$.



L'equazione che uguaglia i valori attuali in questo secondo caso è

$$1\,000 \cdot a_{\overline{4}|i_{1/2}} + S \cdot (1+i)^{-3} + 2S \cdot (1+i)^{-4} = 15\,000,$$

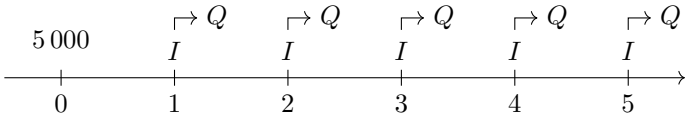
dalla quale si ricava

$$S = \frac{15\,000 - 1\,000 \cdot a_{\overline{4}|i_{1/2}}}{(1+i)^{-3} + 2 \cdot (1+i)^{-4}} = 4\,477.55.$$

ESERCIZIO 2. Una persona ha contratto un prestito di 5 000 al tasso dell'8%. Per la restituzione è previsto il pagamento annuo degli interessi in via posticipata e la restituzione del capitale globalmente dopo 5 anni. Per far fronte al rimborso finale il debitore versa annualmente presso una banca in via posticipata una somma pari al doppio degli interessi annui, al tasso del 7%. Si provi che i versamenti non sono sufficienti a restituire il debito e si determini la differenza tra la somma da rimborsare e la somma costituita tramite i versamenti effettuati. Si calcoli infine l'ammontare di tale differenza nell'ipotesi di volerla restituire alla fine del secondo anno.

✎

Una rappresentazione può essere la seguente:



dove ho indicato con I gli interessi e con Q l'importo di accumulo versato annualmente in banca. Poniamo $i = 8\%$ il tasso concordato per il calcolo degli interessi e $i^B = 7\%$ il tasso praticato dalla banca.

Gli interessi da versare annualmente per 5 anni sono

$$I = 5\,000 \cdot i = 5\,000 \cdot 0.08 = 400.$$

Pertanto l'importo di accumulo è $Q = 800$. Il montante Q' delle quote di accumulo è dato da

$$Q' = 800 \cdot a_{\overline{5}|0.07}(1 + 0.07)^5 = 4\,600.59,$$

che pertanto non sono sufficienti a restituire il debito. La differenza è di

$$5\,000 - 4\,600.59 = 399.41,$$

se valutata alla fine del quinto anno. Volendo restituire questo importo alla fine del secondo anno dovremo calcolare

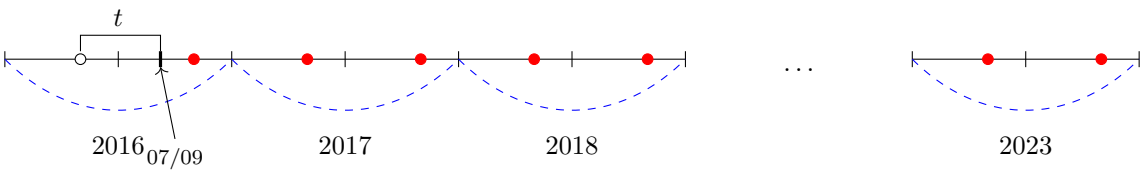
$$399.41 \cdot 1.08^{-3} = 317.06.$$

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. ventennale denominato `Btp-1nv23 9%` con scadenza il 01/11/2023 paga cedole il 01/05 e il 01/11 al tasso cedolare $r = 9\%$. Verrà rimborsato alla pari. Il 07/09/2016 era quotato (corso secco) per l'acquisto a 158.16. Si stabilisca se il suo tasso di rendimento a scadenza *ytm* era in quella data maggiore dell'1% oppure no. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Ipotizzando di aver acquistato il titolo in data 07/09/2016, di tenerlo fino alla scadenza e di reinvestire le cedole su un conto corrente dove il tasso di interesse a credito sarà dell'1.5% fino alla scadenza, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

✎

Ecco la rappresentazione che mostra le scadenze del B.T.P.



Poniamo $r = 9\%$, $F = 100$, $C = 100$. Non c'è tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.09}{2} \cdot 100 = 4.5.$$

Il calcolo del numero di cedole: una nel 2016 e due dal 2017 al 2023: in tutto sono $n = 15$. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (dal 01/05 al 07/09): sono $30 + 30 + 30 + 30 + 7 = 127$ giorni e quindi la misura in semestri di tale intervallo è $t = \frac{127}{180}$.

Per ottenere la stima sul tasso di rendimento a scadenza occorre calcolare il prezzo tel quel.

$$P_{\text{tq}} = P_s + \text{rateo} = 158.16 + 4.5 \cdot \frac{127}{180} = 158.16 + 3.175 = 161.335.$$

L'equazione del tasso di rendimento a scadenza ytm è

$$P_{\text{tq}} = 4.5 \cdot \text{a}_{\overline{15}|ytm_{1/2}} \cdot (1 + ytm_{1/2})^t + 100 \cdot (1 + ytm_{1/2})^{-n+t}.$$

Non è richiesto il calcolo di ytm, ma solo di stabilire se è maggiore o minore di $i = 1\%$. Dobbiamo quindi usare il "valore di prova" e poi confrontare i valori ottenuti. Serve il tasso semestrale equivalente all'1% annuo. Si ha

$$i_{1/2} = (1 + 0.01)^{1/2} - 1 = 0.004987562.$$

Si trova

$$4.5 \cdot \text{a}_{\overline{15}|i_{1/2}} \cdot (1 + i_{1/2})^{127/180} + 100 \cdot (1 + i_{1/2})^{-15+127/180} = 158.24 < 161.335.$$

Pertanto, dato che la funzione valore attuale decresce al crescere del tasso, vuol dire che il tasso dell'1% sta alla destra di ytm e cioè che il tasso di rendimento a scadenza è minore dell'1%.

Passiamo al calcolo del rendimento effettivo a seguito del reinvestimento delle cedole. Dobbiamo uguagliare il valore finale dell'importo investito per l'acquisto del titolo al valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) con le cedole, sommato al rimborso finale. Riportiamo gli importi alla scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua e con $i_{\text{eff}1/2}$ il suo equivalente su base semestrale, l'equazione per il tasso di rendimento effettivo è

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}1/2})^{n-t} = M + C,$$

dove M è il montante delle cedole reinvestite. Se indichiamo con $i^B = 1.5\%$ il tasso praticato dalla banca, si ha

$$M = 4.5 \cdot \text{a}_{\overline{n}|i^B_{1/2}}(1 + i^B_{1/2})^n.$$

Dato che $i^B_{1/2} = 0.007472083$, si ottiene

$$M = 4.5 \cdot \text{a}_{\overline{15}|i^B_{1/2}}(1 + i^B_{1/2})^{15} = 71.14748048,$$

da cui $M + C = 171.14748048$. Risolvendo l'equazione si trova

$$i_{\text{eff}1/2} = \left(\frac{M + C}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(15-127/180)} - 1 = 0.004139006,$$

da cui si ricava il tasso effettivo su base annua

$$i_{\text{eff}} = (1 + i_{\text{eff}1/2})^2 - 1 = 0.008295144.$$

ESERCIZIO 4. Relativamente all'acquisto di un immobile del valore di 150 000 abbiamo queste due alternative di pagamento:

A. pagare subito con uno sconto del 4%;

B. pagare subito 70 000 e successivamente 3 rate annuali (posticipate), la prima da 40 000 e le altre due da 25 000.

Ipotizzando un tasso esterno annuo del 10%, quale delle due modalità conviene in base al criterio del REA/VAN? Dire se il tasso esterno di interesse per cui le due modalità sono indifferenti supera l'11% oppure no. A quanto deve scendere infine lo sconto percentuale affinché le due modalità siano equivalenti in base al REA?

✎

Calcoliamo i VAN dei due progetti al tasso del 10% (indichiamo il valore positivo, ricordando che sono degli esborsi).

$$\text{VAN}_A = 150\,000(1 - 0.04) = 144\,000$$

e

$$\text{VAN}_B = 70\,000 + 40\,000 \cdot 1.1^{-1} + 25\,000 \cdot 1.1^{-2} + 25\,000 \cdot 1.1^{-3} = 145\,807.66.$$

Quindi in base al criterio del VAN conviene il progetto A, per il quale l'esborso è minore.

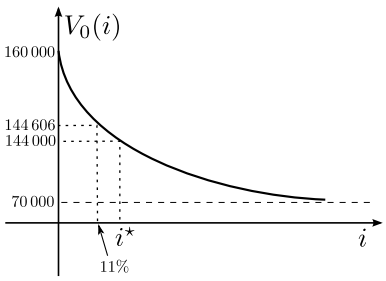
Ora dobbiamo stabilire se il tasso esterno di interesse per cui le due modalità sono indifferenti, chiamiamolo $i^\star$, supera l'11% oppure no. L'equazione che porta a determinare questo tasso è quella in cui vengono uguagliati i valori attuali delle due modalità, quindi

$$144\,000 = 70\,000 + 40\,000 \cdot (1+i)^{-1} + 25\,000 \cdot (1+i)^{-2} + 25\,000 \cdot (1+i)^{-3}.$$

Questa equazione non si può risolvere in modo esatto e infatti la domanda non chiede di determinare il tasso $i^\star$, ma solo di dire se è maggiore o minore dell'11%. Usiamo allora come "valore di prova" il tasso dell'11%, calcolando per questo il valore del termine di destra dell'equazione precedente. Si ha

$$70\,000 + 40\,000 \cdot 1.11^{-1} + 25\,000 \cdot 1.11^{-2} + 25\,000 \cdot 1.11^{-3} = 144\,606.38 > 144\,000.$$

Ricordando che in questo caso la funzione valore attuale decresce al crescere del tasso, possiamo concludere che il tasso dell'11% cade prima della soluzione esatta dell'equazione e quindi che il tasso $i^\star$ è maggiore dell'11%. La figura a fianco rappresenta il grafico della funzione $V_0(i)$, cioè il valore attuale dei pagamenti relativi alla modalità B: per questa 160 000 è il valore che la funzione assume in $i = 0$ (somma degli importi) e 70 000 è il valore della funzione per $i \to +\infty$.



Per quest'ultimo aspetto, da un punto di vista analitico basta calcolare il limite. Dal punto di vista finanziario, se il tasso diventa infinito tutti gli importi futuri si annullano e resta quindi il solo importo iniziale.

Infine, affinché le due modalità siano equivalenti, occorre che lo sconto percentuale d risolva l'equazione

$$150\,000(1-d) = 145\,807.66 \quad \text{da cui} \quad d = 1 - \frac{145\,807.66}{150\,000} = 0.027948933 \quad (2.79\%).$$