Svolgimento dei temi d'esame di MDEF
Anno Accademico 2017/18

Alberto Peretti

Settembre 2018

PROVA INTERMEDIA di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 09/11/2017

ESERCIZIO 1. Determinare:

(a) nel R.I.S. il tasso di interesse semestrale equivalente al tasso di sconto annuo del 10%;

(b) nel R.I.C. il tasso di sconto semestrale equivalente al tasso di sconto annuo del 10%;

(c) nel R.S.C. il tasso di interesse semestrale equivalente al tasso di interesse annuo del 10%.

✎

(a) Abbiamo $d = 0.1$. Conviene seguire questo percorso: $d \to i \to i_{1/2}$. Pertanto

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0.1}{1-0.1} = 0.\overline{1} \quad \text{e} \quad i_{1/2} = \frac{i}{2} = \frac{0.\overline{1}}{2} = 0.0\overline{5}.$$

(b) Abbiamo nuovamente $d = 0.1$. Conviene seguire questo percorso: $d \to i \to i_{1/2} \to d_{1/2}$. Pertanto

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0.1}{1-0.1} = 0.\overline{1} \quad ; \quad i_{1/2} = (1+i)^{1/2} - 1 = 0.054092553 \quad ; \quad d_{1/2} = \frac{i_{1/2}}{1+i_{1/2}} = 0.051316701.$$

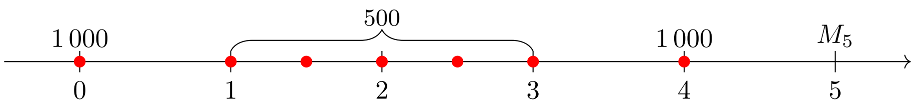
(c) Abbiamo ora $i = 0.1$. Conviene seguire questo percorso: $i \to d \to d_{1/2} \to i_{1/2}$. Pertanto

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0.1}{1+0.1} = 0.\overline{09} \quad ; \quad d_{1/2} = \frac{d}{2} = 0.0\overline{45} \quad ; \quad i_{1/2} = \frac{d_{1/2}}{1-d_{1/2}} = 0.047619047.$$

ESERCIZIO 2. Per la costituzione di un capitale M_5 alla fine del 5° anno verso subito 1 000€, poi 5 rate semestrali da 500€, la prima delle quali tra un anno, e infine ancora 1 000€ alla fine del 4° anno. Si determini M_5, ipotizzando un tasso di interesse annuo del 5%.
Volendo raddoppiare il capitale costituito, si determini la nuova rata, mantenendo inalterate le altre modalità.

✎

Può essere utile rappresentare lo schema dei versamenti in un grafico.



Il capitale M_5 da costituire alla fine del 5° anno è dato da

$$M_5 = 1\,000(1+i)^5 + 500 \cdot a_{\overline{5}|i_{1/2}}(1+i)^{4.5} + 1\,000(1+i).$$

Dato che $i_{1/2} = (1+0.05)^{1/2} - 1 = 0.024695076$, si trova $M_5 = 5\,222.07$€.
Se si vuole costituire un capitale doppio, sempre alla fine del 5° anno, l'equazione del valore sarà

$$2M_5 = 1\,000(1+i)^5 + R \cdot a_{\overline{5}|i_{1/2}}(1+i)^{4.5} + 1\,000(1+i),$$

da cui si può ricavare R con

$$R = \frac{2M_5 - 1\,000(1+i)^5 - 1\,000(1+i)}{a_{\overline{5}|i_{1/2}}(1+i)^{4.5}} = 1\,401.67€.$$

ESERCIZIO 3. Una società finanziaria, relativamente ad un bene con prezzo di listino $P = 20\,000$€, vuole proporre ad un cliente un contratto di leasing di durata 4 anni che prevede un anticipo del 10% del prezzo di listino, un riscatto pari al 5% del prezzo di listino e il versamento di 16 canoni trimestrali posticipati. La società può avere uno sconto del 10% sull'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto un tasso di interesse annuo dell'11%. Si scriva l'equazione del valore per la società di leasing e si determini a quanto deve ammontare il canone da proporre al cliente.
Sapendo che il cliente può avere uno sconto del 5% sull'acquisto del bene, si scriva l'equazione del valore per il cliente.
Sapendo infine che il cliente per l'acquisto diretto del bene può avere un prestito dalla sua banca al tasso di interesse annuo del 9%, si dica se egli ragionevolmente sceglierà il prestito bancario o il contratto di leasing.

✎

La società finanziaria spende $20\,000 \cdot (1 - 0.1) = 18\,000$€ per l'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto di leasing un tasso di interesse dell'11%.

Le quantità rilevanti nel contratto sono l'anticipo $A = 20\,000 \cdot 0.1 = 2\,000$€ e il riscatto finale $F = 20\,000 \cdot 0.05 = 1\,000$€. Serve anche il tasso di interesse trimestrale $i_{1/4} = 1.11^{1/4} - 1 = 0.026433327$.

Indicato con R il canone trimestrale, l'equazione del valore per la società di leasing è

$$18\,000 = 2\,000 + 1\,000(1 + 0.11)^{-4} + R\mathrm{a}_{\overline{16}|i_{1/4}}.$$

Da questa si ricava

$$R = \frac{18\,000 - 2\,000 - 1\,000(1 + 0.11)^{-4}}{\mathrm{a}_{\overline{16}|i_{1/4}}} = 1\,188.27€.$$

Ora passiamo alla valutazione del cliente, al quale viene proposto un contratto di leasing con le caratteristiche ottenute poco fa (cioè un anticipo di 2 000€, un riscatto finale di 1 000€ e un canone di 16 rate trimestrali di 1 188.27€). Tenendo conto che il cliente può avere uno sconto del 5% sul prezzo d'acquisto del bene, egli è interessato a scoprire qual è il tasso implicito nell'equivalenza finanziaria tra lo spendere oggi $20\,000 \cdot 0.95 = 19\,000$€ e distribuire il pagamento nel tempo alle condizioni del contratto.

La sua equazione del valore è quindi

$$19\,000 = 2\,000 + 1\,000(1 + i)^{-4} + 1\,188.27\mathrm{a}_{\overline{16}|i_{1/4}}.$$

La soluzione esatta di questa equazione fornirebbe al cliente un valore preciso da confrontare con il tasso proposto dalla banca per un prestito di 19 000€. La risoluzione esatta (in realtà approssimata) di questa equazione richiederebbe l'uso di approssimazioni successive, eventualmente con il metodo di Newton, e non è richiesta.

Per poter dire quale sarà la scelta ragionevole del cliente tra stipulare il contratto di leasing e chiedere un prestito alla banca al tasso $i^{(B)} = 9\%$ possiamo semplicemente calcolare il valore attuale degli importi relativi al contratto al tasso della banca. Dopo aver calcolato il tasso equivalente quadrimestrale $i^{(B)}_{1/4} = 0.021778181$, si trova

$$2\,000 + 1\,000(1 + i^{(B)})^{-4} + 1\,188.27\mathrm{a}_{\overline{16}|i^{(B)}_{1/4}} = 18\,617.45€.$$

Dato che $18\,617.45 < 19\,000$, il tasso della banca sconta maggiormente gli importi rispetto al tasso effettivo incognito e quindi il tasso della banca è maggiore rispetto ad $i^\star$.

Il cliente ragionevolmente sceglierà il contratto di leasing.

ESERCIZIO 4. Si scriva il piano di ammortamento di un debito di 10 000€ mediante 2 rate (da determinare) R_1 e $R_2 = 2R_1$ (pagate alla fine del 1° e del 2° anno), con quote capitale e quote interessi entrambe posticipate. Si assuma un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Si scriva poi il nuovo piano di ammortamento dello stesso debito attraverso rate con anticipazione degli interessi e quote capitale (da determinare) C_1 e $C_2 = 2C_1$.

✎

Con la prima modalità sappiamo che, se la prima rata di ammortamento è R, la seconda è $2R$. L'equazione del valore per l'intero piano è quindi

$$10\,000 = R(1 + i)^{-1} + 2R(1 + i)^{-2},$$

da cui possiamo ricavare

$$R = \frac{10\,000}{(1 + i)^{-1} + 2(1 + i)^{-2}} = 3\,903.23€.$$

Abbiamo quindi $R_1 = 3\,903.23$€ e $R_2 = 2R_1 = 7\,806.45$€.

Ricordando ora che, detto $D_0 = 10\,000$€ il debito residuo iniziale, la prima quota interessi è $I_1 = iD_0 = 1\,000$€, possiamo calcolare in sequenza le quantità mancanti

$$\begin{aligned} C_1 &= R_1 - I_1 = 3\,903.23 - 1\,000 = 2\,903.23€ \\ D_1 &= D_0 - C_1 = 10\,000 - 2\,903.23 = 7\,096.77€ \\ I_2 &= i \cdot D_1 = 0.1 \cdot 7\,096.77 = 709.68€ \\ C_2 &= R_2 - I_2 = 7\,806.45 - 709.68 = 7\,096.77€ \end{aligned}$$

da cui $D_2 = D_1 - C_2 = 0$. Il piano è dunque il seguente.

t	$R_k = C + I_k$	C	I_k	D_k
0	0	0	0	10 000
1	3 903.23	2 903.23	1 000	7 096.77
2	7 806.45	7 096.77	709.68	0

Con la seconda modalità sappiamo invece che, se la prima quota capitale è C, la seconda è $2C$. Ricordando che la somma delle quote capitale deve dare il debito iniziale, l'equazione è

$$D_0 = C + 2C, \text{ da cui si ricava } C = \frac{D_0}{3} = \frac{10\,000}{3} = 3\,333.33€.$$

Abbiamo quindi $C_1 = 3\,333.33$€ e $C_2 = 2C_1 = 6\,666.67$€.

Ricordando ora che gli interessi sono anticipati e che si ottengono dal debito residuo corrispondente attraverso il tasso di sconto d, abbiamo

$$I_0 = d \cdot D_0 = \frac{0.1}{1+0.1} \cdot 10\,000 = 0.\overline{09} \cdot 10\,000 = 909.09€.$$

Possiamo in sequenza ricavare le altre quantità

$$\begin{aligned} R_0 &= I_0 = 909.09€ \\ D_1 &= D_0 - C_1 = 10\,000 - 3\,333.33 = 6\,666.67€ \\ I_1 &= d \cdot D_1 = 0.\overline{09} \cdot 6\,666.67 = 606.06€ \\ R_1 &= C_1 + I_1 = 3\,333.33 + 606.06 = 3\,939.39€ \end{aligned}$$

da cui $R_2 = C_2 = 6\,666.67$€. Il piano è dunque il seguente.

t	$R_k = C + I_k$	C	I_k	D_k
0	909.09	0	909.09	10 000
1	3 939.39	3 333.33	606.06	6 666.67
2	6 666.67	6 666.67	0	0

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 18/01/2018

ESERCIZIO 1. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/01/2018 con le seguenti caratteristiche:
- valore facciale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza tra 4 anni;
- cedole quadrimestrali con tasso cedolare $r = 3\%$;
- prezzo di emissione $P_0 = 99$.

Si determini una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza ytm all'emissione e si dica se il vero tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 3%. Sempre utilizzando la prima approssimazione, si dica di quanto varia in percentuale il tasso di rendimento a scadenza se introduciamo la tassazione.

Si determini poi il prezzo tel quel dell'obbligazione il 01/09/2018 ipotizzando un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 2.5%. (Qui non si consideri la tassazione e si usi l'anno commerciale.)

✎

Ponendo $F = 100$, $n = 12$ (cedole quadrimestrali), $C = 100$, $r = 0.03$, $P_0 = 99$, senza considerare la tassazione, la formula per una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza fornisce

$$ytm_0^{\text{NOTAX}} = \frac{\frac{r}{3}F + (C - P_0)/n}{(C + 2P_0)/3} = \frac{\frac{0.03}{3} \cdot 100 + (100 - 99)/12}{(100 + 2 \cdot 99)/3} = 0.01090604 \text{ (è un tasso quadrimestrale)},$$

equivalente ad un tasso annuo $i = 0.033076243$.

Dobbiamo ora dire se il vero tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 3%. L'equazione che definisce il vero tasso di rendimento a scadenza è

$$99 = 1 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/3}} + 100(1 + i)^{-4}.$$

Se calcoliamo il termine di destra per $i = 3\%$ (quindi $i_{1/3} = 0.009901634$) si ottiene il valore $100.11 > 99$. Ricordando che il temine di destra è decrescente al crescere di i, significa che il vero tasso di rendimento a scadenza è maggiore del 3%.

Consideriamo ora la tassazione e ritroviamo la prima approssimazione del tasso. Indicando con γ l'aliquota del 12.50%, cioè $\gamma = 0.125$, la cedola netta è

$$\text{Ced} = \frac{r}{3}F(1 - \gamma) = 1 \cdot 0.875 = 0.875.$$

La tassazione colpisce anche il capitale in quanto il valore di rimborso $C = 100$ supera il prezzo di acquisto $P = 99$. Pertanto il rimborso netto è

$$\text{Cn} = 100 - (100 - 99) \cdot 0.125 = 99.875.$$

La formula per la prima approssimazione fornisce ora

$$ytm_0^{\text{TAX}} = \frac{\text{Ced} + (\text{Cn} - P_0)/n}{(\text{Cn} + 2P_0)/3} = \frac{0.875 + (99.875 - 99)/12}{(99.875 + 2 \cdot 99)/3} = 0.009546789 \text{ (è un tasso quadrimestrale)},$$

equivalente ad un tasso annuo $i = 0.028914662$.

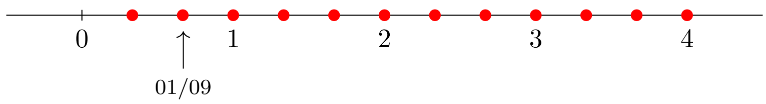
Dobbiamo ora dire di quanto varia in percentuale il tasso di rendimento a scadenza con la tassazione (rispetto alla non tassazione). Quanto richiesto è dato da

$$\frac{\Delta i}{i} = \frac{ytm_0^{\text{TAX}} - ytm_0^{\text{NOTAX}}}{ytm_0^{\text{NOTAX}}} = \frac{0.028914662 - 0.033076243}{0.033076243} = -0.1258 \ (-12.58\%).$$

Veniamo all'ultima domanda: il prezzo tel quel dell'obbligazione il 01/09/2018, nell'ipotesi che il tasso di rendimento a scadenza in quella data sia del 2.5% (no tassazione e anno commerciale). Può essere utile una rappresentazione (vedi pagina seguente), dove in rosso sono indicate le cedole.

Alla data del 01/09 vi saranno ancora 10 cedole da incassare. Quindi, con $ytm = 0.025$, cui corrisponde un $ytm_{1/3} = 0.008264838$, il prezzo tel quel è dato da

$$P_{\text{tq}} = 1 \cdot a_{\overline{10}|ytm_{1/3}} + 100(1 + ytm_{1/3})^{-10} = 101.659.$$

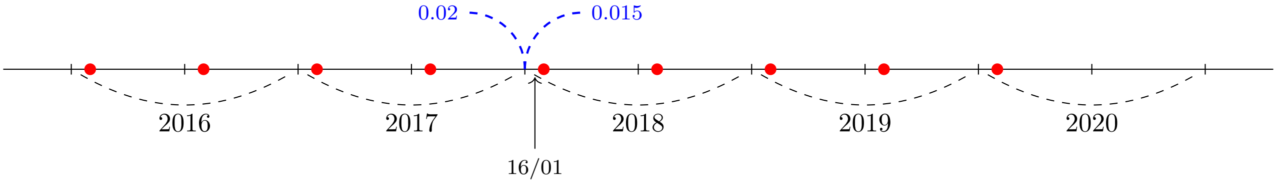


ESERCIZIO 2. Il B.T.P. denominato `Btp-1fb20 4,5%`, con scadenza il 01/02/2020, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 4.5\%$. Il 16/01/2018 era quotato (corso secco) a 109.38. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 01/01/2016 al prezzo $P = 106$, di aver reinvestito le cedole per i primi due anni al tasso del 2% e di continuare a farlo fino alla scadenza al tasso del 1.5%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Si consideri la tassazione.)

✎

Il titolo paga le cedole al 01/02 e al 01/08. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dalla data di acquisto del 01/01/2016.



Non consideriamo la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.045}{2} \cdot 100 = 2.25.$$

La prima domanda fa riferimento alla data del 16/01/2018, in cui viene fornita la quotazione (corso secco P_{s}) di 109.38. Il numero di cedole ancora da incassare a quella data è $n = 5$. Il tempo t tra la cedola precedente e la data del 16/01/2018: sono 5 mesi e 16 giorni, quindi $t = 30 \cdot 5 + 16 = 166$ giorni.

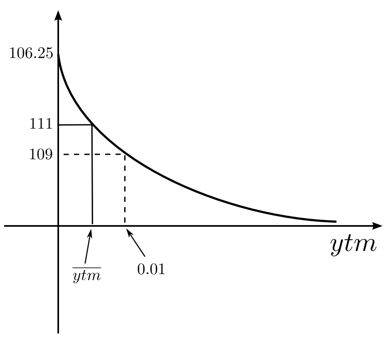
Il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 109.38 + 2.25 \cdot \frac{166}{180} = 111.455.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 2.25 \cdot \text{a}_{\overline{5}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{166/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-5+166/180}.$$

Come si sa il calcolo della soluzione esatta è problematico. Viene chiesto solo di dire se il tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. Basta calcolare il termine di destra al tasso dell'1% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente $0.01_{1/2} = 0.004987562$): si trova il valore $109.126 < 111.455$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza ($\overline{ytm}$ nella figura a fianco) era minore dell'1%.



Passiamo ora alla seconda domanda. L'ipotesi è di aver acquistato il titolo in data 01/01/2016 al prezzo (tel quel) $P = 106$, di aver reinvestito le cedole al tasso del 2% fino a tutto il 2017 e successivamente, fino alla scadenza, al tasso del 1.5%. Dobbiamo trovare, considerando la tassazione, il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

Questa volta le cedole da considerare sono 9 (4 cadono nel primo periodo e 5 nel secondo). Serve la cedola netta.

$$\textsc{Ced} = 2.25(1 - 0.125) = 1.96875.$$

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/02/2020, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$M_0 = 106(1 + i_{\text{eff}})^{4+1/12}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2017, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 4 cedole da valutare al tasso $i^{(1)} = 2\%$ (montante M_1) e le restanti 5 cedole al tasso $i^{(2)} = 1.5\%$ (montante M_2). Usiamo "a figurato" in entrambi i casi.

Servono i tassi semestrali equivalenti

$$i^{(1)}_{1/2} = 0009950494 \qquad \text{e} \qquad i^{(2)}_{1/2} = 0.007472084.$$

Si ha (attenzione ai tassi e alla corrispondente misura dei tempi)

$$M_1 = \textsc{Ced} \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|i^{(1)}_{1/2}} \left(1 + i^{(1)}_{1/2}\right)^{5-1/6} \cdot \left(1 + i^{(2)}\right)^{2+1/12} = 8.313456476$$

e

$$M_2 = \textsc{Ced} \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|i^{(2)}_{1/2}} \cdot \left(1 + i^{(2)}_{1/2}\right)^{5} = 9.991959958.$$

L'equazione è pertanto

$$106(1 + i_{\text{eff}})^{4+1/12} = M_1 + M_2 + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{106}\right)^{1/(4+1/12)} - 1 = 0.027262252.$$

ESERCIZIO 3. L'acquisto di un bene venduto al prezzo di listino di 12 000€ può avvenire o con pagamento immediato con lo sconto dell'1%, oppure con un finanziamento di 7 000€ da restituire in 12 rate mensili costanti (posticipate) di 600€. Le spese accessorie per il contratto di finanziamento ammontano a 80€. Si confrontino le due possibilità mediante il criterio del R.E.A. con un tasso esterno del 10%.

Si calcoli una prima approssimazione del T.A.N. (Tasso Annuo Nominale) e si dica se questa è per difetto o per eccesso. Si trovi poi una prima approssimazione del T.A.E.G. (Tasso Annuo Effettivo Globale) dell'operazione. Si dia infine anche una stima del tasso effettivo di costo i_{eff} su base annua dell'acquisto attraverso il finanziamento, determinando se tale tasso è maggiore o minore del 10%.

✎

Indichiamo con A la prima modalità, cioè il pagamento immediato con lo sconto, e con B la seconda, cioè con il finanziamento.

Il REA della modalità A è

$$\text{REA}_A(0.1) = -12\,000(1 - 0.01) = -11\,880.$$

La modalità B prevede, dato che il prezzo di listino è 12 000€, il pagamento immediato della parte non finanziata, cioè 5 000€, il pagamento immediato delle spese accessorie del contratto di finanziamento, cioè 80€, e le 12 rate mensili posticipate di 600€.

Il REA della modalità B è pertanto (indico col simbolo $0.1_{1/12}$ il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 10%)

$$\text{REA}_B(0.1) = -5\,000 - 80 - 6000 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|0.1_{1/12}} = -11\,920.29.$$

La modalità A è quindi preferibile alla modalità B.

Per il calcolo del T.A.N. sottostante il contratto di finanziamento, cioè il tasso di costo della possibilità di pagare attraverso il finanziamento rispetto al pagamento del prezzo di listino, l'equazione da considerare è

$$12\,000 = 5\,000 + 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 7\,000 = 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

Questa equivale chiaramente all'equazione del valore attuale di una rendita ($V_0 = R\mathrm{a}_{\overline{n}|i}$), in cui l'incognita è il tasso. Abbiamo studiato una formula che fornisce una prima approssimazione della soluzione, ed è

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R} = \frac{2(12 - 7\,000/600)}{13 \cdot 7\,000/600} = 0.004395604 \text{ (tasso mensile)},$$

al quale corrisponde un tasso annuo $\mathrm{TAN}_0 = 0.054041331$.

Per dire se si tratta di un'approssimazione per difetto o per eccesso torniamo a considerare l'equazione

$$7\,000 = 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}$$

e calcoliamo il termine di destra con il tasso approssimato appena ottenuto. Si ottiene $6\,998.44 < 7\,000$. L'approssimazione è pertanto per eccesso.

Per il calcolo del T.A.E.G. le cose sono simili, cambia solo il termine di destra dell'equazione, dato che dobbiamo considerare anche i costi accessori del contratto. L'equazione è ora

$$12\,000 = 5\,000 + 80 + 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 6\,920 = 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

La formula di approssimazione fornisce ora

$$i_0 = \frac{2(12 - 6\,920/600)}{13 \cdot 6\,920/600} = 0.006224988 \text{ (tasso mensile)},$$

che, convertito nell'equivalente tasso annuo, fornisce $\mathrm{TAEG}_0 = 0.077311218$.

Vediamo ora il tasso effettivo. Questo esce dal confronto tra le due effettive possibilità, cioè il contratto di finanziamento oppure il pagamento immediato del prezzo scontato. L'equazione che definisce il tasso effettivo i^{eff} è

$$11\,880 = 5\,000 + 80 + 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i^{\mathrm{eff}}_{1/12}}.$$

La valutazione del termine di destra con un tasso di prova del 10% ($0.1_{1/12} = 0.00797414$) è

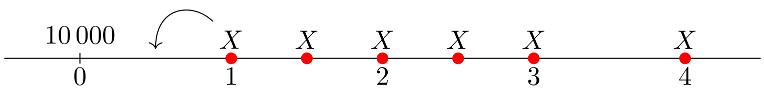
$$11\,920 > 11\,880$$

e quindi il tasso effettivo è maggiore del 10%.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 18/01/2018

ESERCIZIO 1. Posso restituire un prestito di 10 000€ in 4 anni mediante 5 rate semestrali costanti, la prima delle quali tra un anno, e un ulteriore versamento dello stesso importo alla fine del quarto anno. Nell'ipotesi che il tasso di interesse annuo applicato sia $i = 10\%$, si determini l'ammontare del suddetto importo.

Nell'ipotesi invece di poter restituire metà del prestito tra un anno e il resto con successive rate trimestrali posticipate di 400€, con quante rate intere e quale residuo, allo stesso tasso, posso restituire il prestito?



Vista la cadenza delle prime rate conviene calcolare il tasso equivalente semestrale:

$$i_{1/2} = 1.1^{1/2} - 1 = 0.04880884.$$

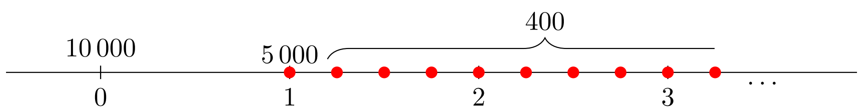
Indicato con X, come in figura, il valore dell'importo incognito, l'equazione del valore è

$$10\,000 = X \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|i_{1/2}} \left(1 + i_{1/2}\right)^{-1} + X(1+i)^{-4},$$

da cui si ricava

$$X = \frac{10\,000}{\mathrm{a}_{\overline{5}|i_{1/2}} \cdot \left(1 + i_{1/2}\right)^{-1} + (1+i)^{-4}} = 2\,072.70€.$$

Passiamo alla seconda modalità di restituzione del prestito. Una figura che illustra la nuova situazione è



Per poter restituire il prestito occorre che

$$5\,000(1+i)^{-1} + 400 \cdot \mathrm{a}_{\overline{n}|i_{1/4}}(1+i)^{-1} \geq 10\,000$$

che equivale a

$$\mathrm{a}_{\overline{n}|i_{1/4}} \geq \frac{10\,000 - 5\,000(1+i)^{-1}}{400(1+i)^{-1}} = \frac{10\,000(1+i) - 5\,000}{400} \qquad \Big(= 15 = A\Big).$$

La disequazione equivale a sua volta alle

$$\frac{1 - (1 + i_{1/4})^{-n}}{i_{1/4}} \geq A \quad \Leftrightarrow \quad 1 - (1 + i_{1/4})^{-n} \geq i_{1/4}A \quad \Leftrightarrow \quad (1 + i_{1/4})^{-n} \leq 1 - i_{1/4}A$$

e ancora, applicando i logaritmi,

$$-n \ln(1 + i_{1/4}) \leq \ln(1 - i_{1/4}A) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1 - i_{1/4}A)}{\ln(1 + i_{1/4})} = 18.84.$$

Questo dice che con 19 rate intere si restituisce più del dovuto e pertanto bastano $n = 18$ rate intere più un residuo. Con $n = 18$ si ha

$$5\,000(1+i)^{-1} + 400 \cdot \mathrm{a}_{\overline{18}|i_{1/4}}(1+i)^{-1} = 9\,804.97€.$$

Pertanto

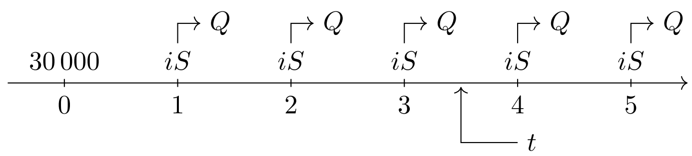
$$10\,000 - 9\,804.97 = 195.03€$$

è il residuo calcolato al tempo $t = 0$. Se vogliamo il valore da versare unitamente all'ultima rata basta capitalizzare per il tempo $t = 1 + 18 \cdot \frac{1}{4}$:

$$195.03 \cdot (1+i)^{1+18/4} = 329.43€.$$

ESERCIZIO 2. Un prestito di 30 000€ viene restituito in 5 rate annue posticipate con un ammortamento americano a due tassi. Per quanto riguarda gli interessi, pagati anch'essi in via posticipata, il tasso di remunerazione concordato è del 6%. Per la restituzione del capitale, la banca presso la quale vengono depositate le quote di accumulazione offre un tasso del 2%. Si determini l'ammontare della quota interessi I e della quota di accumulazione Q. Si calcoli il fondo di accumulazione dopo 3 anni e mezzo. Si scriva l'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo dell'ammortamento e si dica se questo tasso è maggiore o minore del 6%.

✎



Indicando con $S = 30\,000€$ l'ammontare del prestito e con $i = 0.06$ il tasso di remunerazione, la quota interessi I è costante ed è uguale agli interessi annui sull'intero debito. Quindi si ha

$$I = iS = 0.06 \cdot 30\,000 = 1\,800€.$$

Indicando con Q la quota di accumulazione, anch'essa costante, e con $i^\star = 0.02$ il tasso di accumulazione, Q si determina in modo che il montante delle 5 quote sia uguale al capitale mutuato. Quindi essa deve soddisfare l'equazione

$$Q\mathrm{a}_{\overline{5}|i^\star}(1+i^\star)^5 = S,$$

da cui

$$Q = \frac{S}{\mathrm{a}_{\overline{5}|i^\star}(1+i^\star)^5} = \frac{30\,000}{\mathrm{a}_{\overline{5}|0.02}(1+0.02)^5} = 5\,764.75€.$$

Pertanto la rata di ammortamento (anch'essa costante) è

$$R = Q + I = 5\,764.75 + 1\,800 = 7\,564.75€.$$

Il fondo di accumulazione F_t dopo 3 anni e mezzo è il valore delle quote di accumulazione già versate dopo 3 anni e mezzo, cioè all'epoca $t = 3.5$. Dato che all'epoca t sono state versate 3 quote di accumulazione, si ha

$$F_t = Q\mathrm{a}_{\overline{3}|i^\star}(1+i^\star)^t = 5\,764.75 \cdot \mathrm{a}_{\overline{3}|0.02}(1+0.02)^{3.5} = 17\,817.99€.$$

L'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo i_{eff} dell'ammortamento è

$$S = R\mathrm{a}_{\overline{5}|i_{\text{eff}}} \quad \text{cioè} \quad 30\,000 = 7\,564.75 \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|i_{\text{eff}}}.$$

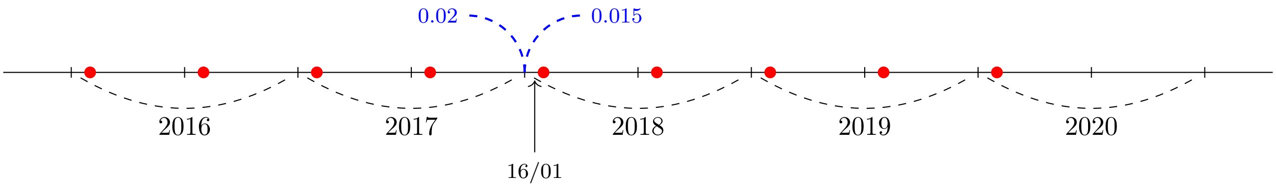
Per stabilire se il tasso effettivo è maggiore o minore del 6% basta calcolare qual è il valore attuale delle 5 rate dell'ammortamento al tasso del 6% e confrontarlo con 30 000. Si trova

$$R \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|0.06} = 7\,564.75\mathrm{a}_{\overline{5}|0.06} = 31\,865.48€ > 30\,000€.$$

Dato che il tasso effettivo sconta più del tasso del 6%, significa che il tasso effettivo è maggiore del 6%.

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. denominato `Btp-1fb20 4,5%`, con scadenza il 01/02/2020, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 4.5\%$. Il 16/01/2018 era quotato (corso secco) a 109.38. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 01/01/2016 al prezzo $P = 106$, di aver reinvestito le cedole per i primi due anni al tasso del 2% e di continuare a farlo fino alla scadenza al tasso del 1.5%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Si consideri la tassazione.)



✎

Il titolo paga le cedole al 01/02 e al 01/08. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dalla data di acquisto del 01/01/2016.

Non consideriamo la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.045}{2} \cdot 100 = 2.25.$$

La prima domanda fa riferimento alla data del 16/01/2018, in cui viene fornita la quotazione (corso secco P_s) di 109.38. Il numero di cedole ancora da incassare a quella data è $n = 5$. Il tempo t tra la cedola precedente e la data del 16/01/2018: sono 5 mesi e 16 giorni, quindi $t = 30 \cdot 5 + 16 = 166$ giorni.

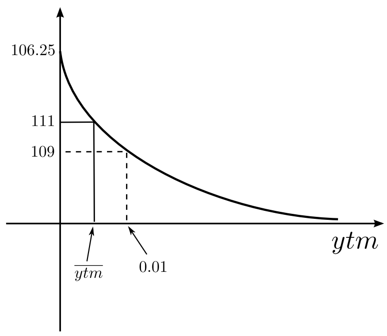
Il prezzo tel quel è quindi

$$P_\mathrm{tq} = P_\mathrm{s} + \text{rateo} = 109.38 + 2.25 \cdot \frac{166}{180} = 111.455.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_\mathrm{tq} = 2.25 \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{166/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-5+166/180}.$$

Come si sa il calcolo della soluzione esatta è problematico. Viene chiesto solo di dire se il tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. Basta calcolare il termine di destra al tasso dell'1% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente $0.01_{1/2} = 0.004987562$): si trova il valore $109.126 < 111.455$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza ($\overline{ytm}$ nella figura a fianco) era minore dell'1%.



Passiamo ora alla seconda domanda. L'ipotesi è di aver acquistato il titolo in data 01/01/2016 al prezzo (tel quel) $P = 106$, di aver reinvestito le cedole al tasso del 2% fino a tutto il 2017 e successivamente, fino alla scadenza, al tasso del 1.5%. Dobbiamo trovare, considerando la tassazione, il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

Questa volta le cedole da considerare sono 9 (4 cadono nel primo periodo e 5 nel secondo). Serve la cedola netta.

$$\textsc{Ced} = 2.25(1 - 0.125) = 1.96875.$$

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/02/2020, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_eff il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$M_0 = 106(1 + i_\mathrm{eff})^{4+1/12}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2017, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 4 cedole da valutare al tasso $i^{(1)} = 2\%$ (montante M_1) e le restanti 5 cedole al tasso $i^{(2)} = 1.5\%$ (montante M_2). Usiamo "a figurato" in entrambi i casi.

Servono i tassi semestrali equivalenti

$$i^{(1)}_{1/2} = 0009950494 \qquad \text{e} \qquad i^{(2)}_{1/2} = 0.007472084.$$

Si ha (attenzione ai tassi e alla corrispondente misura dei tempi)

$$M_1 = \text{C}\textsc{ed} \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|i^{(1)}_{1/2}} \left(1 + i^{(1)}_{1/2}\right)^{5-1/6} \cdot \left(1 + i^{(2)}\right)^{2+1/12} = 8.313456476$$

e

$$M_2 = \text{C}\textsc{ed} \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|i^{(2)}_{1/2}} \cdot \left(1 + i^{(2)}_{1/2}\right)^{5} = 9.991959958.$$

L'equazione è pertanto

$$106(1 + i_{\text{eff}})^{4+1/12} = M_1 + M_2 + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{106}\right)^{1/(4+1/12)} - 1 = 0.027262252.$$

ESERCIZIO 4. L'acquisto di un bene venduto al prezzo di listino di 12 000€ può avvenire o con pagamento immediato con lo sconto dell'1%, oppure con un finanziamento di 7 000€ da restituire in 12 rate mensili costanti (posticipate) di 600€. Le spese accessorie per il contratto di finanziamento ammontano a 80€. Si confrontino le due possibilità mediante il criterio del R.E.A. con un tasso esterno del 10%.

Si calcoli una prima approssimazione del T.A.N. (Tasso Annuo Nominale) e si dica se questa è per difetto o per eccesso. Si trovi poi una prima approssimazione del T.A.E.G. (Tasso Annuo Effettivo Globale) dell'operazione. Si dia infine anche una stima del tasso effettivo di costo i_{eff} su base annua dell'acquisto attraverso il finanziamento, determinando se tale tasso è maggiore o minore del 10%.

✎

Indichiamo con A la prima modalità, cioè il pagamento immediato con lo sconto, e con B la seconda, cioè con il finanziamento.

Il REA della modalità A è

$$\text{REA}_A(0.1) = -12\,000(1 - 0.01) = -11\,880.$$

La modalità B prevede, dato che il prezzo di listino è 12 000€, il pagamento immediato della parte non finanziata, cioè 5 000€, il pagamento immediato delle spese accessorie del contratto di finanziamento, cioè 80€, e le 12 rate mensili posticipate di 600€.

Il REA della modalità B è pertanto (indico col simbolo $0.1_{1/12}$ il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 10%)

$$\text{REA}_B(0.1) = -5\,000 - 80 - 6000 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|0.1_{1/12}} = -11\,920.29.$$

La modalità A è quindi preferibile alla modalità B.

Per il calcolo del T.A.N. sottostante il contratto di finanziamento, cioè il tasso di costo della possibilità di pagare attraverso il finanziamento rispetto al pagamento del prezzo di listino, l'equazione da considerare è

$$12\,000 = 5\,000 + 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 7\,000 = 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

Questa equivale chiaramente all'equazione del valore attuale di una rendita ($V_0 = R\mathrm{a}_{\overline{n}|i}$), in cui l'incognita è il tasso. Abbiamo studiato una formula che fornisce una prima approssimazione della soluzione, ed è

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R} = \frac{2(12 - 7\,000/600)}{13 \cdot 7\,000/600} = 0.004395604 \text{ (tasso mensile)},$$

al quale corrisponde un tasso annuo $\text{TAN}_0 = 0.054041331$.

Per dire se si tratta di un'approssimazione per difetto o per eccesso torniamo a considerare l'equazione

$$7\,000 = 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}$$

e calcoliamo il termine di destra con il tasso approssimato appena ottenuto. Si ottiene $6\,998.44 < 7\,000$. L'approssimazione è pertanto per eccesso.

Per il calcolo del T.A.E.G. le cose sono simili, cambia solo il termine di destra dell'equazione, dato che dobbiamo considerare anche i costi accessori del contratto. L'equazione è ora

$$12\,000 = 5\,000 + 80 + 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 6\,920 = 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

La formula di approssimazione fornisce ora

$$i_0 = \frac{2(12 - 6\,920/600)}{13 \cdot 6\,920/600} = 0.006224988 \text{ (tasso mensile)},$$

che, convertito nell'equivalente tasso annuo, fornisce $\mathrm{TAEG}_0 = 0.077311218$.

Vediamo ora il tasso effettivo. Questo esce dal confronto tra le due effettive possibilità, cioè il contratto di finanziamento oppure il pagamento immediato del prezzo scontato. L'equazione che definisce il tasso effettivo i^{eff} è

$$11\,880 = 5\,000 + 80 + 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12|}i^{\mathrm{eff}}_{1/12}}.$$

La valutazione del termine di destra con un tasso di prova del 10% ($0.1_{1/12} = 0.00797414$) è

$$11\,920 > 11\,880$$

e quindi il tasso effettivo è maggiore del 10%.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 06/02/2018

ESERCIZIO 1. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/01/2017 con le seguenti caratteristiche:
- scadenza 01/01/2022;
- valore facciale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- cedole annue con tasso cedolare $r = 3\%$;
- prezzo di emissione $P_0 = 101$.

Considerando la tassazione, si trovi una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza all'emissione e si dica se il vero tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 2%.

Si determini poi il prezzo tel quel dell'obbligazione il 15/02/2018 ipotizzando un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 2%. (Si consideri la tassazione e si usi l'anno commerciale.)

Si dica infine se si può avere tassazione sulle sole cedole con un tasso di rendimento a scadenza del 3%.

	15/02 ↓				
101	3	3	3	3	3 + 100
0	1	2	3	4	5

Poniamo $F = 100$, $n = 5$, $C = 100$, $r = 0.03$, $P_0 = 101$. Considerando la tassazione (aliquota $\gamma = 0.125$), la cedola netta risulta $rF(1-\gamma) = 3 \cdot 0.875 = 2.625$. Non c'è tassazione sul valore di rimborso.

La formula per una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza fornisce

$$ytm_0 = \frac{rF(1-\gamma) + (C - P_0)/n}{(C + 2P_0)/3} = \frac{2.625 + (100 - 101)/5}{(100 + 2 \cdot 101)/3} = 0.024089403.$$

Dobbiamo ora dire se il vero tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 2%. L'equazione che definisce il vero tasso di rendimento a scadenza è

$$101 = 2.625 \cdot a_{\overline{5}|ytm} + 100(1 + ytm)^{-5}.$$

Se calcoliamo il termine di destra con $ytm = 2\%$ si ottiene il valore $102.95 > 101$. Ricordando che il temine di destra è decrescente al crescere di ytm, significa che il vero tasso di rendimento a scadenza è maggiore del 2%.

Determiniamo ora il prezzo tel quel il 15/02/2018 ipotizzando un tasso di rendimento a scadenza del 2%. L'equazione è

$$P_{\text{tq}} = 2.625 \cdot a_{\overline{4}|ytm}(1 + ytm)^{45/360} + \mathrm{C_N}(1 + ytm)^{-4+45/360}.$$

Ovviamente non conosciamo ancora $\mathrm{C_N}$. Se $\mathrm{C_N} = 100$ risulta $P_{\text{tq}} = 102.63 > 100$.

Attenzione però, perché occorre calcolare il corso secco. Il rateo è

$$2.625 \cdot \frac{45}{360} = 0.328$$

e pertanto

$$P_{\text{s}} = P_{\text{tq}} - \text{rateo} = 102.63 - 0.328 = 102.302 > 100.$$

Possiamo quindi concludere che l'ipotesi di $\mathrm{C_N} = 100$ è accettabile.

Nell'ipotesi che sia $\mathrm{C_N} = 100$ con un tasso di rendimento a scadenza del 3% si ha invece

$$P_{\text{tq}} = 2.625 \cdot a_{\overline{4}|0.03}(1 + ytm)^{45/360} + 100(1 + 0.03)^{-4+45/360} = 98.97 < 100$$

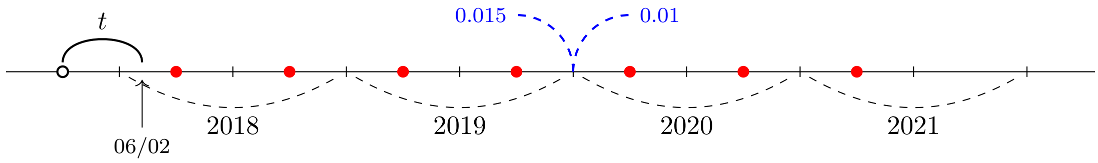
e quindi questa volta l'ipotesi non è accettabile. Si osservi che in questo caso non serve il calcolo del corso secco.

ESERCIZIO 2. Si consideri un B.T.P. con scadenza 01/04/2021 e tasso cedolare $r = 4\%$. Ipotizzando che il 06/02/2018 abbia un corso secco $P_s = 103$, si dica se il il suo tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 2.5%. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Supponendo di acquistare il titolo in data 06/02/2018 al prezzo $P = 102$ e di reinvestire le cedole al tasso dell'1.5% fino a tutto il 2019 e successivamente al tasso dell'1%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Si consideri la tassazione.)

✎

Il titolo paga le cedole al 01/04 e al 01/10. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dall'anno 2018, in cui viene acquistato.



La cedola (non tassata) è 2; saranno incassate $n = 7$ cedole e dalla data dell'ultima cedola non incassata (01/10/2017) sono passati $t = 30 \cdot 4 + 6 = 126$ giorni. Il rateo è $2 \cdot \frac{126}{180} = 1.4$.

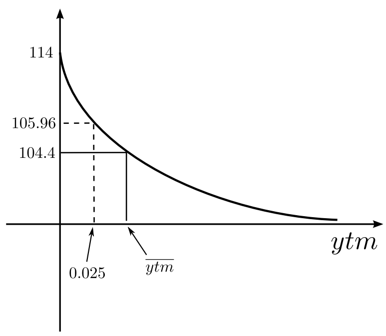
Quindi il prezzo tel quel è $P_{\text{tq}} = 103 + 1.4 = 104.4$. Il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 103 + 1.4 = 104.4.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$104.4 = 2 \cdot a_{\overline{7}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{126/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-7+126/180}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 2.5%. Calcolando il termine di destra al tasso del 2.5% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente $0.025_{1/2} = 0.012422836$) si trova il valore $105.96 > 104.4$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso (vedi figura), possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza ($\overline{ytm}$ nella figura) è maggiore del 2.5%.



Passiamo ora alla seconda domanda. Qui dobbiamo considerare la tassazione: la cedola netta è

$$\text{CED} = 2(1 - 0.125) = 1.75.$$

Non c'è tassazione sul capitale dato che il titolo è acquistato sopra la pari.

L'ipotesi è di acquistare il titolo in data 06/02/2018 al prezzo (tel quel) $P = 102$, di reinvestire 4 cedole al tasso dell'1.5% 3 cedole al tasso dell'1%.

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/04/2020, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$M_0 = 102(1 + i_{\text{eff}})^{3+54/360}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2019, dividiamo il calcolo in due parti (montante M_1 per le prime 4 cedole e montante M_2 per le altre 3). Usiamo "a figurato" in entrambi i casi.

Servono i tassi semestrali equivalenti

$$1.015_{1/2} = 0.007472083 \qquad \text{e} \qquad 0.01_{1/2} = 0.004987562.$$

Si ha (attenzione ai tassi e alla corrispondente misura dei tempi)

$$M_1 = 1.75 \cdot a_{\overline{4}|0.015_{1/2}} (1 + 0.015_{1/2})^{4+90/180} \cdot (1 + 0.01))^{1+90/360} = 7.19417241$$

e

$$M_2 = 1.75 \cdot \mathrm{a}_{\overline{3}|0.01_{1/2}} \cdot \left(1 + 0.01_{1/2}\right)^3 = 5.276228232.$$

L'equazione è pertanto

$$M_0 = M_1 + M_2 + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{102}\right)^{1/(3+54/360)} - 1 = 0.031507531.$$

ESERCIZIO 3. Si considerino i seguenti due progetti di investimento:

$A.$

-10	-2	6	-1	8
0	1	2	3	4

$B.$

-12	0	7	-1	7
0	1	2	3	4

Ipotizzando un tasso esterno annuo del 3%, quale dei due progetti conviene in base al criterio del REA/VAN? Si dica anche se i due progetti sono convenienti, in base allo stesso criterio, rispetto all'investimento di denaro. Si dica se la situazione cambia con un tasso del 2%.

Si dica perché i flussi dei due progetti consentono di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento per entrambi. In base a tutti i risultati ottenuti in precedenza, si dia una stima di un possibile TIR dei due progetti e si migliori questa stima con uno dei metodi studiati.

✎

Al tasso di valutazione del 3% si ha

$$\mathrm{REA}_A(0.03) = -10 - \frac{2}{1.03} + \frac{6}{1.03^2} - \frac{1}{1.03^3} + \frac{8}{1.03^4} = -0.0934$$

e

$$\mathrm{REA}_B(0.03) = -12 + \frac{7}{1.03^2} - \frac{1}{1.03^3} + \frac{7}{1.03^4} = -0.0976.$$

Conviene il progetto A e nessuno dei due progetti è conveniente rispetto all'investimento di denaro.

Con un tasso di valutazione del 2% si trova

$$\mathrm{REA}_A(0.02) = -10 - \frac{2}{1.02} + \frac{6}{1.02^2} - \frac{1}{1.02^3} + \frac{8}{1.02^4} = 0.2547$$

e

$$\mathrm{REA}_B(0.02) = -12 + \frac{7}{1.02^2} - \frac{1}{1.02^3} + \frac{7}{1.02^4} = 0.2528.$$

Qui conviene ancora A, ma sono convenienti entrambi.

L'unicità del TIR è garantita dal comportamento del segno dei flussi cumulati. Questi sono

$$\text{per il progetto } A\text{:} \quad -10\ ,\ -12\ ,\ -6\ ,\ -7\ ,\ +1$$

e

$$\text{per il progetto } B\text{:} \quad -12\ ,\ -12\ ,\ -5\ ,\ -6\ ,\ +1.$$

Per entrambi c'è un solo cambiamento di segno e questa è una condizione che assicura l'unicità del TIR.

Ora una stima del TIR di entrambi i progetti. Tornando ad osservare i valori trovati sopra dei due REA (negativi per un tasso del 3% e positivi per una tasso del 2%) possiamo affermare, data l'unicità del TIR, che per entrambi si ha

$$0.02 < \mathrm{TIR} < 0.03.$$

Il modo più semplice per migliorare questa è usare il metodo di bisezione, che consiste nel trovare una nuova stima con il valore

$$\frac{0.02 + 60.03}{2} = 0.025.$$

A conferma si può ricalcolare per questo tasso i valori dei REA, che risultano vicini a 0.07.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 06/02/2018

ESERCIZIO 1. Voglio costituire alla fine del quinto anno un capitale di 10 000€ e sto considerando due alternative.

La prima prevede 5 versamenti semestrali di 1 000€, il primo subito, un versamento V alla fine del 3° anno e un versamento $2V$ alla fine del 4° anno. Si determini V sapendo che il tasso di interesse annuo è del 5%.

La seconda prevede n rate mensili posticipate di 400€. Voglio sapere se servono più di 2 anni per completare i versamenti necessari (stessa finalità e stesso tasso).

✎

Ecco uno schema del piano di accumulo.

Vista la cadenza delle prime rate conviene calcolare il tasso equivalente semestrale:

$$i_{1/2} = 1.05^{1/2} - 1 = 0.024695076.$$

Uguagliando il valore capitalizzato dei versamenti al valore del capitale da costituire si ha l'equazione del valore

$$1\,000 \cdot a_{\overline{5}|i_{1/2}} \left(1 + i_{1/2}\right)(1+i)^5 + V(1+i)^2 + 2V(1+i) = 10\,000,$$

che fornisce la soluzione

$$V = \frac{10\,000 - 1\,000 \cdot a_{\overline{5}|i_{1/2}} \left(1 + i_{1/2}\right)(1+i)^5}{(1+i)^2 + 2(1+i)} = 1\,223.69€.$$

Passiamo alla seconda modalità. Una figura che illustra la nuova situazione è

Qui serve il tasso equivalente mensile: $i_{1/12} = 1.05^{1/12} - 1 = 0.004074123$. Per poter costituire il capitale finale occorre che

$$400 \cdot a_{\overline{n}|i_{1/12}} (1+i)^5 \geq 10\,000$$

che equivale a

$$a_{\overline{n}|i_{1/12}} \geq \frac{10\,000}{400}(1+i)^{-5} = 31.907 \quad \left(= A\right).$$

La disequazione equivale a sua volta alle

$$\frac{1 - (1 + i_{1/12})^{-n}}{i_{1/12}} \geq A \quad \Leftrightarrow \quad 1 - (1 + i_{1/12})^{-n} \geq i_{1/12} A \quad \Leftrightarrow \quad (1 + i_{1/12})^{-n} \leq 1 - i_{1/12} A$$

e ancora, applicando i logaritmi,

$$-n \ln(1 + i_{1/12}) \leq \ln(1 - i_{1/12} A) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1 - i_{1/12} A)}{\ln(1 + i_{1/12})} = 20.46.$$

Questo dice che con 21 rate intere si accumula più del dovuto e pertanto bastano $n = 20$ rate intere più un residuo. In ogni caso servono meno di 2 anni.

ESERCIZIO 2. Si scriva il piano di ammortamento di un debito di 10 000€ mediante 2 rate (da determinare) $R_1 = R$ e $R_3 = 3R$ (pagate alla fine del 1° e del 3° anno, quindi $R_0 = R_2 = 0$), con quote capitale e quote interessi entrambe posticipate. Si assuma un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Si scriva poi il nuovo piano di ammortamento dello stesso debito attraverso rate con anticipazione degli interessi e quote capitale (da determinare) $C_1 = C$ e $C_3 = 3C$ (quindi $C_0 = C_2 = 0$).

✎

Con rate $R_1 = R$ e $R_3 = 3R$ e $R_0 = R_2 = 0$ possiamo determinare subito il valore R. L'equazione del valore per l'intero piano è

$$R(1+i)^{-1} + 3R(1+i)^{-3} = 10\,000,$$

da cui possiamo ricavare

$$R = \frac{10\,000}{(1+i)^{-1} + 3(1+i)^{-3}} = 3\,161.52€.$$

Abbiamo quindi $R_1 = 3\,161.52€$ e $R_3 = 3R_1 = 9\,484.56€$.

Ricordando ora che, detto $D_0 = 10\,000€$ il debito residuo iniziale, la prima quota interessi è $I_1 = iD_0 = 1\,000€$, possiamo calcolare in sequenza le quantità mancanti:

$$\begin{aligned}
C_1 &= R_1 - I_1 = 3\,161.52 - 1\,000 = 2\,161.52€ \\
D_1 &= D_0 - C_1 = 10\,000 - 2\,161.52 = 7\,838.48€ \\
I_3 &= D_1(1+i)^2 - D_1 = 1\,646.08€ \\
C_3 &= R_3 - I_3 = 9\,484.56 - 1\,646.08 = 7\,838.48€
\end{aligned}$$

Pertanto il piano è il seguente:

t	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	10 000
1	3 161.52	2 161.52	1 000	7 838.48
2	0	0	0	7 838.48
3	9 484.56	7 838.48	1 646.08	0

Con la seconda modalità abbiamo invece anticipazione degli interessi e quote capitale $C_1 = C$ e $C_3 = 3C$ (con $C_0 = C_2 = 0$).

Intanto abbiamo la prima quota interessi

$$I_0 = 10\,000 \cdot d = 10\,000 \cdot \frac{i}{1+i} = 909.09€.$$

Poi, dato che la somma delle quote capitale deve uguagliare il debito, si ha l'equazione

$$C + 3C = 10\,000, \text{ da cui } C = 2\,500€.$$

Gli interessi sono anticipati e si ottengono sempre dal debito residuo corrispondente attraverso il tasso di sconto d.

Il piano è ora il seguente:

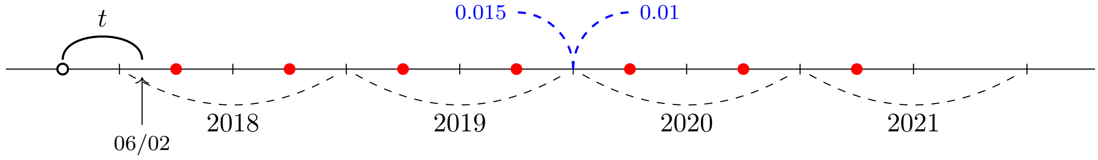
t	R_k	C_k	I_k	D_k
0	909.09	0	909.09	10 000
1	3 181.82	2 500	681.82	7 500
2	681.82	0	681.82	7 500
3	7 500	7 500	0	0

ESERCIZIO 3. Si consideri un B.T.P. con scadenza 01/04/2021 e tasso cedolare $r = 4\%$. Ipotizzando che il 06/02/2018 abbia un corso secco $P_s = 103$, si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 2.5%. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Supponendo di acquistare il titolo in data 06/02/2018 al prezzo $P = 102$ e di reinvestire le cedole al tasso dell'1.5% fino a tutto il 2019 e successivamente al tasso dell'1%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Si consideri la tassazione.)

Si dica infine se si può avere tassazione sulle sole cedole con un tasso di rendimento a scadenza del 3.5%.

Il titolo paga le cedole al 01/04 e al 01/10. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dall'anno 2018, in cui viene acquistato.



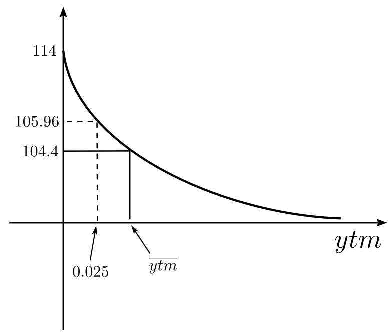
La cedola (non tassata) è 2; saranno incassate $n = 7$ cedole e dalla data dell'ultima cedola non incassata (01/10/2017) sono passati $t = 30 \cdot 4 + 6 = 126$ giorni. Il rateo è $2 \cdot \frac{126}{180} = 1.4$.

Il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\mathrm{tq}} = P_{\mathrm{s}} + \text{rateo} = 103 + 1.4 = 104.4.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$104.4 = 2 \cdot a_{\overline{7}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{126/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-7+126/180}.$$



Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 2.5%. Calcolando il termine di destra al tasso del 2.5% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente $0.025_{1/2} = 0.012422836$) si trova il valore $105.96 > 104.4$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso (vedi figura), possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza ($\overline{ytm}$ nella figura) è maggiore del 2.5%.

Passiamo ora alla seconda domanda. Qui dobbiamo considerare la tassazione: la cedola netta è

$$\textsc{Ced} = 2(1 - 0.125) = 1.75.$$

Non c'è tassazione sul capitale dato che il titolo è acquistato sopra la pari.

L'ipotesi è di acquistare il titolo in data 06/02/2018 al prezzo (tel quel) $P = 102$, di reinvestire 4 cedole al tasso dell'1.5% 3 cedole al tasso dell'1%.

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/04/2020, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$M_0 = 102(1 + i_{\mathrm{eff}})^{3+54/360}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2019, dividiamo il calcolo in due parti (montante M_1 per le prime 4 cedole e montante M_2 per le altre 3). Usiamo "a figurato" in entrambi i casi.

Servono i tassi semestrali equivalenti

$$1.015_{1/2} = 0.007472083 \qquad \text{e} \qquad 0.01_{1/2} = 0.004987562.$$

Si ha (attenzione ai tassi e alla corrispondente misura dei tempi)

$$M_1 = 1.75 \cdot a_{\overline{4}|0.015_{1/2}} \left(1 + 0.015_{1/2}\right)^{4+90/180} \cdot (1 + 0.01))^{1+90/360} = 7.19417241$$

e

$$M_2 = 1.75 \cdot a_{\overline{3}|0.01_{1/2}} \cdot \left(1 + 0.01_{1/2}\right)^3 = 5.276228232.$$

L'equazione è pertanto

$$M_0 = M_1 + M_2 + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{102}\right)^{1/(3+54/360)} - 1 = 0.031507531.$$

Passiamo ora all'ultima domanda: si può avere tassazione sulle sole cedole con un tasso di rendimento a scadenza del 3.5%? La cosa è possibile se il valore iniziale del titolo, con cedole tassate e rimborso 100, è maggiore di 100. (Se invece fosse minore di 100 avremmo la tassazione anche del capitale.) Calcoliamo quindi

$$1.75 \cdot a_{\overline{7}|0.035_{1/2}}(1 + 0.035_{1/2})^{126/180} + 100(1 + 0.035_{1/2})^{-7+126/180} = 101.31.$$

C'è un'ultima verifica da fare: quello trovato è un prezzo tel quel, mentre la tassazione del capitale si fa sul corso secco. Serve il rateo, che prima non avevamo calcolato perché la tassazione non c'era.

$$\text{rateo} = 1.75 \cdot \frac{126}{180} = 1.225.$$

Quindi $P_{\text{s}} = P_{\text{tq}} - \text{rateo} = 101.31 - 1.225 = 100.085 > 100$ e questo è compatibile con l'ipotesi.

ESERCIZIO 4. Si considerino i seguenti due progetti di investimento:

A.	-10	-2	6	-1	8
	0	1	2	3	4

B.	-12	0	7	-1	7
	0	1	2	3	4

Ipotizzando un tasso esterno annuo del 3%, quale dei due progetti conviene in base al criterio del REA/VAN? Si dica anche se i due progetti sono convenienti, in base allo stesso criterio, rispetto all'investimento di denaro. Si dica se la situazione cambia con un tasso del 2%.

Si dica perché i flussi dei due progetti consentono di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento per entrambi. In base a tutti i risultati ottenuti in precedenza, si dia una stima di un possibile TIR dei due progetti e si migliori questa stima con uno dei metodi studiati.

✎

Al tasso di valutazione del 3% si ha

$$\text{REA}_A(0.03) = -10 - \frac{2}{1.03} + \frac{6}{1.03^2} - \frac{1}{1.03^3} + \frac{8}{1.03^4} = -0.0934$$

e

$$\text{REA}_B(0.03) = -12 + \frac{7}{1.03^2} - \frac{1}{1.03^3} + \frac{7}{1.03^4} = -0.0976.$$

Conviene il progetto A e nessuno dei due progetti è conveniente rispetto all'investimento di denaro.

Con un tasso di valutazione del 2% si trova

$$\text{REA}_A(0.02) = -10 - \frac{2}{1.02} + \frac{6}{1.02^2} - \frac{1}{1.02^3} + \frac{8}{1.02^4} = 0.2547$$

e

$$\text{REA}_B(0.02) = -12 + \frac{7}{1.02^2} - \frac{1}{1.02^3} + \frac{7}{1.02^4} = 0.2528.$$

Qui conviene ancora A, ma sono convenienti entrambi.

L'unicità del TIR è garantita dal comportamento del segno dei flussi cumulati. Questi sono

$$\text{per il progetto } A\text{:} \quad -10\,,\ -12\,,\ -6\,,\ -7\,,\ +1$$

e

$$\text{per il progetto } B\text{:} \quad -12\,,\ -12\,,\ -5\,,\ -6\,,\ +1.$$

Per entrambi c'è un solo cambiamento di segno e questa è una condizione che assicura l'unicità del TIR.

Ora una stima del TIR di entrambi i progetti. Tornando ad osservare i valori trovati sopra dei due REA (negativi per un tasso del 3% e positivi per una tasso del 2%) possiamo affermare, data l'unicità del TIR, che per entrambi si ha

$$0.02 < \text{TIR} < 0.03.$$

Il modo più semplice per migliorare questa è usare il metodo di bisezione, che consiste nel trovare una nuova stima con il valore

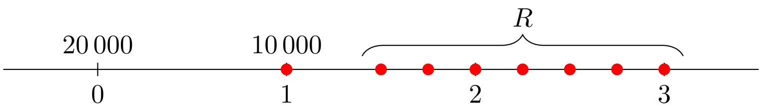
$$\frac{0.02 + 60.03}{2} = 0.025.$$

A conferma si può ricalcolare per questo tasso i valori dei REA, che risultano vicini a 0.07.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 06/06/2018

ESERCIZIO 1. Posso restituire un prestito di 20 000€ in 3 anni mediante un versamento di 10 000€ tra un anno e 7 rate trimestrali costanti, la prima delle quali tra un anno e mezzo. Nell'ipotesi che il tasso di interesse annuo applicato sia $i = 5\%$, si determini l'ammontare della rata trimestrale.

Nell'ipotesi invece di poter restituire il prestito mediante rate trimestrali costanti di 1 000€, la prima delle quali tra un anno, con quante rate intere e quale residuo, allo stesso tasso, posso restituire il prestito?



Vista la cadenza delle rate conviene calcolare il tasso equivalente trimestrale:

$$i_{1/4} = 1.05^{1/4} - 1 = 0.012272234.$$

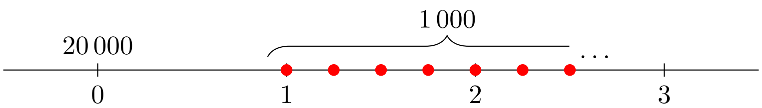
Indicando con R, come in figura, il valore della rata, l'equazione del valore è

$$20\,000 = 10\,000 \cdot (1 + 0.05)^{-1} + R \cdot a_{\overline{7}|0.05_{1/4}} \left(1 + 0.05_{1/4}\right)^{-5},$$

da cui si ricava

$$R = \frac{20\,000 - 10\,000 \cdot (1 + 0.05)^{-1}}{a_{\overline{7}|0.05_{1/4}} \left(1 + 0.05_{1/4}\right)^{-5}} = 1\,669.75€.$$

Passiamo alla seconda modalità di restituzione del prestito. Una figura che illustra la nuova situazione è



Per poter restituire il prestito occorre che

$$1\,000 \cdot a_{\overline{n}|0.05_{1/4}} (1 + 0.05_{1/4})^{-3} \geq 20\,000$$

che equivale a

$$a_{\overline{n}|0.05_{1/4}} \geq \frac{20\,000}{1\,000} (1 + 0.05_{1/4})^3 = 20.7457075 \quad \Big(= A\Big).$$

La disequazione equivale a sua volta alle

$$\frac{1 - (1 + 0.05_{1/4})^{-n}}{0.05_{1/4}} \geq A \quad \Leftrightarrow \quad 1 - (1 + 0.05_{1/4})^{-n} \geq 0.05_{1/4} A \quad \Leftrightarrow \quad (1 + 0.05_{1/4})^{-n} \leq 1 - 0.05_{1/4} A$$

e ancora, applicando i logaritmi,

$$-n \ln(1 + 0.05_{1/4}) \leq \ln(1 - 0.05_{1/4} A) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1 - 0.05_{1/4} A)}{\ln(1 + 0.05_{1/4})} = 24.08.$$

Questo dice che per restituire il prestito servono $n = 24$ rate intere più un residuo.
Con $n = 24$ si ha

$$1\,000 \cdot a_{\overline{24}|0.05_{1/4}} (1 + 0.05_{1/4})^{-3} = 19\,936.53.$$

Pertanto

$$20\,000 - 19\,936.53 = 63.47€$$

è il residuo calcolato al tempo $t = 0$. Se vogliamo il valore da versare unitamente all'ultima rata basta capitalizzare per il tempo $t = 1 + 23 \cdot \frac{1}{4}$ (un anno e 23 trimestri):

$$63.47 \cdot (1 + 0.05)^{1+23/4} = 88.22€.$$

ESERCIZIO 2. Una società finanziaria, relativamente ad un bene con prezzo di listino $P = 25\,000€$, vuole proporre ad un cliente un contratto di leasing di durata biennale che prevede un anticipo del 10% del prezzo di listino, un riscatto pari al 5% del prezzo di listino e il versamento di 24 canoni mensili posticipati. La società può avere uno sconto del 10% sull'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto un tasso di interesse annuo dell'12%. Si scriva l'equazione del valore per la società di leasing e si determini a quanto deve ammontare il canone da proporre al cliente. Sapendo che il cliente può avere uno sconto del 3% sull'acquisto del bene, si scriva l'equazione del valore per il cliente. Sapendo infine che il cliente per l'acquisto diretto del bene può avere un prestito dalla sua banca al tasso di interesse annuo del 7%, si dica se egli ragionevolmente sceglierà il prestito bancario o il contratto di leasing.

✎

La società finanziaria spende $25\,000 \cdot (1 - 0.1) = 22\,500€$ per l'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto di leasing un tasso di interesse del 12%. L'anticipo è di 2 500€ e il riscatto di 1 250€.

Serve il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 12%. Si ha

$$i_{1/12} = 1.12^{1/12} - 1 = 0.009488792..$$

Indicato con R il canone mensile, l'equazione del valore per la società di leasing è

$$22\,500 = 2\,500 + 1\,250(1 + 0.12)^{-2} + R\mathrm{a}_{\overline{24}|0.12_{1/12}},$$

da cui si ricava

$$R = \frac{22\,500 - 2\,500 - 1\,250(1 + 0.12)^{-2}}{\mathrm{a}_{\overline{24}|0.12_{1/12}}} = 889.13€.$$

Ora passiamo alla valutazione del cliente, al quale viene proposto un contratto di leasing con le caratteristiche ottenute poco fa (cioè un anticipo di 2 500€, un riscatto finale di 1 250€ e un canone di 24 rate mensili di 889.13€). Tenendo conto che il cliente può avere uno sconto del 3% sul prezzo d'acquisto del bene, egli è interessato a scoprire qual è il tasso implicito nell'equivalenza finanziaria tra lo spendere oggi $25\,000 \cdot (1 - 0.03) = 24\,250€$ e distribuire il pagamento nel tempo alle condizioni del contratto.

La sua equazione del valore è quindi

$$24\,250 = 2\,500 + 1\,250(1 + i)^{-2} + R\mathrm{a}_{\overline{24}|i_{1/12}}.$$

La soluzione esatta di questa equazione fornirebbe al cliente un valore preciso da confrontare con il tasso proposto dalla banca per un prestito di 24 250€. La risoluzione esatta (in realtà approssimata) di questa equazione richiederebbe l'uso di approssimazioni successive, eventualmente con il metodo di Newton, e non è richiesta.

Per poter dire quale sarà la scelta ragionevole del cliente tra stipulare il contratto di leasing e chiedere un prestito alla banca al tasso $i^{(B)} = 7\%$ possiamo semplicemente calcolare il valore attuale degli importi relativi al contratto al tasso della banca. Dopo aver calcolato il tasso equivalente mensile $i^{(B)}_{1/12} = 0.005654145$, si trova

$$2\,500 + 1\,250(1 + 0.07)^{-2} + R\mathrm{a}_{\overline{24}|0.07_{1/12}} = 23\,493.84 < 24\,250.$$

Il tasso della banca sconta maggiormente gli importi rispetto al tasso effettivo incognito e quindi il tasso della banca è maggiore rispetto ad $i^{\star}$.

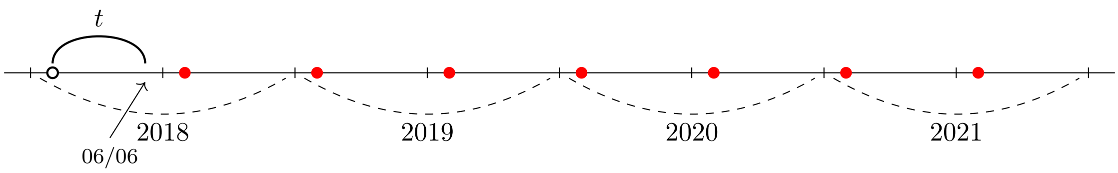
Il cliente ragionevolmente sceglierà il contratto di leasing.

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. `Btp-1ag21 3.75%`, con scadenza il 01/08/2021, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 3.75\%$. Verrà rimborsato alla pari. Oggi (06/06/2018) è quotato (corso secco) a 106. Si stabilisca se il suo tasso di rendimento a scadenza ytm è maggiore del 2% oppure no. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Ipotizzando di acquistare oggi il titolo, di reinvestire le cedole su un conto corrente dove il tasso di interesse a credito sarà dell'1%, e infine di rivendere il titolo il 31/12/2020 al prezzo $P_V = 104$, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P., considerando la tassazione.

✎

Il titolo paga le cedole al 01/02 e al 01/08. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dall'anno 2018, in cui viene acquistato.



Dobbiamo tenere conto della tassazione. La cedola netta è

$$\text{Ced} = \frac{3.75}{2}(1-0.125) = 1.640625.$$

Saranno incassate $n = 7$ cedole e dalla data dell'ultima cedola non incassata (01/02/2018) sono passati $t = 30\cdot 4+6 = 126$ giorni. Il rateo è $1.640625 \cdot \frac{126}{180} = 1.148$.

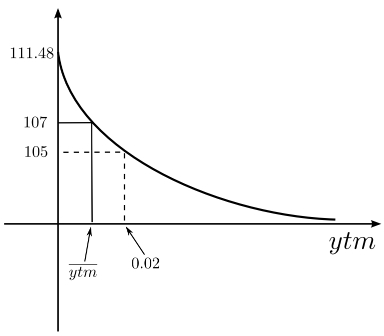
Il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 106 + 1.148 = 107.148.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$107.148 = 1.640625 \cdot a_{\overline{7}|ytm_{1/2}}(1+ytm_{1/2})^{126/180} + 100(1+ytm_{1/2})^{-7+126/180}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 2%. Calcolando il termine di destra al tasso del 2% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente $0.02_{1/2} = 0.009950493$) si trova il valore $105.07 < 107.148$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso (vedi figura), possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza ($\overline{ytm}$ nella figura) è minore del 2%.



Passiamo ora alla seconda domanda. Abbiamo già considerato la tassazione sulle cedole. La cedola netta risulta

$$\text{Ced} = 1.640625.$$

Non c'è tassazione sul capitale dato che il titolo viene venduto a 104 ed era stato acquistato a 106.

L'ipotesi è di acquistare il titolo in data 06/06/2018 al prezzo (tel quel) $P = 107.148$ e di reinvestire 5 cedole al tasso dell'1%.

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 31/12/2020, data di vendita del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, l'equazione è

$$P_{\text{tq}}(1+i_{\text{eff}})^{2+1/2+24/360} = M + P_V.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Calcoliamo allora il montanti M degli importi a credito. Serve il tasso semestrale equivalente all'1%.

$$1.01_{1/2} = 0.004987562.$$

Si ha (attenzione ai tassi e alla corrispondente misura dei tempi)

$$M = 1.640625 \cdot a_{\overline{5}|0.01_{1/2}}\left(1+0.01_{1/2}\right)^{5+5/6} = 8.31978.$$

Dall'equazione scritta sopra si ricava quindi

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M+P_V}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(2+1/2+24/360)} - 1 = 0.018534.$$

ESERCIZIO 4. L'acquisto di un bene venduto al prezzo di listino di 15 000€ può avvenire o con pagamento immediato con lo sconto del 2%, oppure con un finanziamento di 8 000€ da restituire in 12 rate mensili costanti (posticipate) di 670€. Le spese accessorie per il contratto di finanziamento ammontano a 50€. Si confrontino le due possibilità mediante il criterio del R.E.A. con un tasso esterno del 10%.

Si scriva l'equazione del T.A.N., si calcoli una prima approssimazione di questo e si dica se questa è per difetto o per eccesso. Si scriva poi l'equazione del T.A.E.G. e se ne trovi una prima approssimazione. Si dia infine anche una stima del tasso effettivo di costo i_{eff} su base annua dell'acquisto attraverso il finanziamento, provando che tale tasso è compreso tra il 9% e il 10%.

✎

Indichiamo con A la prima modalità, cioè il pagamento immediato con lo sconto, e con B la seconda, cioè con il finanziamento.

Il REA della modalità A è

$$\text{REA}_A(0.1) = -15\,000(1-0.02) = -14\,700.$$

La modalità B prevede, dato che il prezzo di listino è 15 000€, il pagamento immediato della parte non finanziata, cioè 7 000€, il pagamento immediato delle spese accessorie del contratto di finanziamento, cioè 50€, e le 12 rate mensili posticipate di 670€.

Il REA della modalità B è pertanto (indico col simbolo $0.1_{1/12}$ il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 10%)

$$\text{REA}_B(0.1) = -7\,000 - 50 - 670 \cdot \text{a}_{\overline{12}|0.1_{1/12}} = -14\,688.33.$$

La modalità B è quindi preferibile alla modalità A.

Per il calcolo del T.A.N. sottostante il contratto di finanziamento, cioè il tasso di costo della possibilità di pagare attraverso il finanziamento rispetto al pagamento del prezzo di listino, l'equazione da considerare è

$$15\,000 = 7\,000 + 670 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

Per il calcolo di una prima approssimazione del T.A.N. possiamo usare la formula studiata, cioè

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R}, \quad \text{riferita all'equazione} \quad V_0 = R \cdot \text{a}_{\overline{n}|i}.$$

Per applicare questa formula dobbiamo scrivere la nostra equazione nella forma richiesta, e cioè

$$8\,000 = 670 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}. \tag{1}$$

Pertanto

$$i^0_{1/12} = \frac{2(12 - 8\,000/670)}{(12+1)8\,000/670} = 0.00076923,$$

che è un tasso mensile, al quale corrisponde il tasso annuo $i_0 = 0.00926992$.

Per dire se questa approssimazione è per difetto o per eccesso basta calcolare il termine di destra della (1). Si ottiene $7\,999.94 < 8\,000$. Quindi l'approssimazione è per eccesso.

L'equazione del T.A.E.G. è

$$15\,000 = 7\,000 + 50 + 670 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}},$$

la quale, scritta nella forma

$$7\,950 = 670 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}},$$

permette, come prima, di trovare l'approssimazione

$$i^0_{1/12} = \frac{2(12 - 7\,950/670)}{(12+1)7\,950/670} = 0.00174165,$$

tasso mensile al quale corrisponde il tasso annuo $i_0 = 0.02110122$.

Ora il tasso effettivo. L'equazione è

$$14\,700 = 7\,000 + 50 + 670 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

Per provare che il tasso effettivo, cioè la soluzione di questa equazione, è compreso tra il 9% e il 10% basta calcolare il termine di destra con questi due valori.

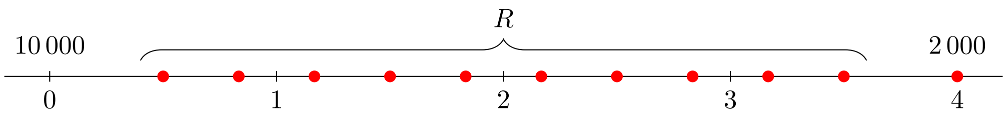
Con $i = 10\%$ si ottiene 14 688 (come il REA) e con $i = 9\%$ si ottiene 14 725. Il primo è minore di 14 700, il secondo maggiore. Quindi è provato che il tasso effettivo è compreso tra i due tassi di prova.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 06/09/2018

ESERCIZIO 1. Posso restituire un prestito di 10 000€ in 4 anni mediante 10 rate quadrimestrali R, la prima tra 6 mesi, e un versamento alla fine del 4º anno di 2 000€. Si determini la rata R, sapendo che il tasso di interesse annuo applicato è $i = 5\%$.

Nell'ipotesi invece di poter restituire il prestito mediante rate mensili di 200€, la prima delle quali tra 6 mesi, con quante rate intere e quale residuo, allo stesso tasso, posso farlo?

✎



Vista la cadenza delle rate conviene calcolare il tasso equivalente quadrimestrale:

$$i_{1/3} = 1.05^{1/3} - 1 = 0.016396356.$$

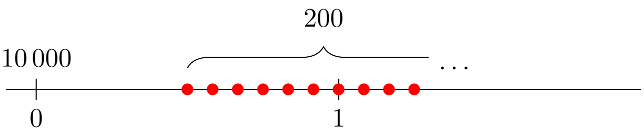
Uguagliando il valore attualizzato dei versamenti al valore del prestito si ha l'equazione del valore

$$10\,000 = R \cdot a_{\overline{10}|i_{1/3}}(1+i)^{-2/12} + 2\,000(1+i)^{-4},$$

che fornisce la soluzione

$$R = \frac{10\,000 - 2\,000(1+i)^{-4}}{a_{\overline{10}|i_{1/3}}(1+i)^{-2/12}} = 920.09€.$$

Passiamo alla seconda modalità. Una figura che illustra la nuova situazione è



Qui serve il tasso equivalente mensile: $i_{1/12} = 1.05^{1/12} - 1 = 0.004074123$. Per poter restituire il prestito occorre che

$$200 \cdot a_{\overline{n}|i_{1/12}}(1+i_{1/12})^{-5} \geq 10\,000$$

che equivale a

$$a_{\overline{n}|i_{1/12}} \geq \frac{10\,000}{200}(1+i_{1/12})^5 = 51.027 \quad \Big(= A\Big).$$

La disequazione equivale a sua volta alle

$$\frac{1-(1+i_{1/12})^{-n}}{i_{1/12}} \geq A \quad \Leftrightarrow \quad 1-(1+i_{1/12})^{-n} \geq i_{1/12}A \quad \Leftrightarrow \quad (1+i_{1/12})^{-n} \leq 1 - i_{1/12}A$$

e ancora, applicando i logaritmi,

$$-n\ln(1+i_{1/12}) \leq \ln(1-i_{1/12}A) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1-i_{1/12}A)}{\ln(1+i_{1/12})} = 57.32.$$

Questo dice che con 57 rate intere più un residuo si può restituire il prestito. Calcoliamo il residuo.

Riferito all'istante iniziale il residuo è

$$\text{RES}_0 = 10\,000 - 200 \cdot a_{\overline{57}|i_{1/12}}(1+i_{1/12})^{-5} = 49.62.$$

Portato all'istante finale, quello del pagamento dell'ultima rata, si ha

$$\mathrm{RES}_{\text{finale}} = \mathrm{RES}_0(1+i_{1/12})^{5+57} = 63.85.$$

ESERCIZIO 2. Si scriva il piano di ammortamento di un debito di 10 000€ mediante 2 rate (da determinare) $R_1 = R$ e $R_3 = 2R$ (pagate alla fine del 1° e del 3° anno, quindi $R_0 = R_2 = 0$), con quote capitale e quote interessi entrambe posticipate. Si assuma un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Considerare poi la situazione in cui è previsto anche il pagamento di una quota interessi $I_2 \neq 0$ (alla fine del 2° anno). Si scriva il nuovo piano di ammortamento dello stesso debito.

✎

Con rate $R_1 = R$ e $R_3 = 2R$ e $R_0 = R_2 = 0$ possiamo determinare subito il valore R. L'equazione del valore per l'intero piano è

$$R(1+i)^{-1} + 2R(1+i)^{-3} = 10\,000,$$

da cui possiamo ricavare

$$R = \frac{10\,000}{(1+i)^{-1} + 2(1+i)^{-3}} = 4\,146.42€.$$

Abbiamo quindi $R_1 = 4\,146.42€$ e $R_3 = 2R_1 = 8\,292.83€$.

Ricordando ora che, detto $D_0 = 10\,000€$ il debito residuo iniziale, la prima quota interessi è $I_1 = iD_0 = 1\,000€$, possiamo calcolare in sequenza le quantità mancanti:

$$\begin{array}{rcl}
C_1 &=& R_1 - I_1 = 4\,146.42 - 1\,000 = 3\,146.42€ \\
D_1 &=& D_0 - C_1 = 10\,000 - 3\,146.42 = 6\,853.58€ \\
I_3 &=& D_1(1+i)^2 - D_1 = 1\,439.25€ \text{ [1]} \\
C_3 &=& R_3 - I_3 = 8\,292.83 - 1\,439.25 = 6\,853.58€
\end{array}$$

Pertanto il piano è il seguente:

t	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	10 000
1	4 146.42	3 146.42	1 000	6 853.58
2	0	0	0	6 853.58
3	8 292.83	6 853.58	1 439.25	0

Con la seconda modalità abbiamo invece, oltre alla stessa modalità della rata (cioè $R_1 = R$, $R_3 = 2R$), anche il pagamento di una quota interessi $I_2 \neq 0$ alla fine del 2° anno. Attenzione che la rata trovata nella situazione precedente non è più valida, dato che è come se ci fosse una rata non nulla anche alla fine del 2° anno, data da una quota interessi. Serve ancora un'equazione che ci permetta di trovare R.

Possiamo intanto dire che

$$I_1 = iD_0 = 1\,000€ \quad \text{e} \quad C_1 = R - I_1.$$

Da questa segue che

$$D_1 = D_0 - C_1 = 10\,000 - (R - I_1) = 11\,000 - R$$

e quindi

$$I_2 = iD_1 = i(11\,000 - R).$$

Ora abbiamo l'equazione nella sola R che ci serviva:

$$R(1+i)^{-1} + i(11\,000 - R)(1+i)^{-2} + 2R(1+i)^{-3} = 10\,000,$$

cioè

$$R(1+i)^{-1} + 11\,000i(1+i)^{-2} - Ri(1+i)^{-2} + 2R(1+i)^{-3} = 10\,000.$$

[1] Si noti che si poteva equivalentemente trovare la quota interessi applicando al debito il tasso di interesse biennale, cioè $i_2 = (1+i)^2 - 1$ e quindi trovando $I_3 = i_2 \cdot D_1$.

Da questa si ricava

$$R = \frac{10\,000 - 11\,000 i(1+i)^{-2}}{(1+i)^{-1} - i(1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-3}} = 3\,903.23.$$

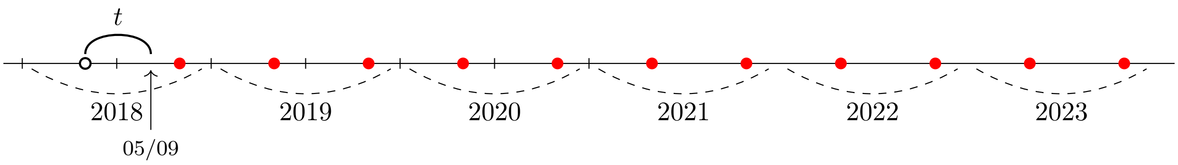
Ora possiamo completare il nuovo piano:

t	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	10 000
1	3 903.23	2 903.23	1 000	7 096.77
2	709.68	0	709.68	7 096.77
3	7 806.45	7 096.77	709.68	0

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. `Btp-1nv23 9%`, con scadenza il 01/11/2023, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 9\%$. Verrà rimborsato alla pari. Ieri, 05/09/2018, era è quotato (corso secco) a 132.38. Si stabilisca se il suo tasso di rendimento a scadenza ytm era maggiore del 2% oppure no. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Ipotizzando di aver acquistato ieri il titolo, di reinvestire le cedole su un conto corrente dove il tasso di interesse a credito sarà dell'1%, e infine di rivendere il titolo il 31/12/2020 al prezzo $P_V = 136$, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P., considerando la tassazione.

Ecco la rappresentazione che mostra le caratteristiche del B.T.P.



Calcoliamo le quantità rilevanti. Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2} F \cdot (1 - 0.125) = \frac{0.09}{2} \cdot 100 \cdot (1 - 0.125) = 3.9375.$$

Il numero di cedole: una nel 2018 e poi due dal 2019 al 2023: in tutto sono $n = 11$.

Il tempo t trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/05/2018): si ha $t = 30 \cdot 4 + 5 = 125$ giorni.

Calcoliamo il prezzo tel quel. Serve il rateo:

$$\text{rateo} = 3.9375 \cdot \frac{125}{180} = 2.734.$$

Quindi il prezzo tel quel del titolo è dato da

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 132.38 + 2.734 = 135.114.$$

Non c'è tassazione sul valore di rimborso, dato che il valore nominale è minore del prezzo di acquisto.

L'equazione per il tasso di rendimento a scadenza ytm è

$$3.9375 \cdot \mathrm{a}_{\overline{11}|ytm_{1/2}} (1 + ytm_{1/2})^{125/180} + 100 \cdot (1 + ytm_{1/2})^{-11+125/180} = 135.114.$$

Per rispondere alla domanda se il tasso di rendimento a scadenza ytm era il 05/09/2018 maggiore del 2% oppure no possiamo calcolare il termine di sinistra dell'equazione assegnando al tasso il valore $0.02_{1/2} = 1.02^{1/2} - 1 = 0.009950493$. Si ottiene

$$P_{\text{tq}}(0.02) = 131.4 < 132.38.$$

Quindi, dato che il tasso di rendimento a scadenza sconta meno di quanto fa il 2%, possiamo affermare che $ytm < 2\%$.

Ora passiamo alla seconda domanda. Anzitutto osserviamo che il prezzo di vendita del titolo è maggiore del prezzo di acquisto e quindi c'è tassazione anche sul capitale. Il valore netto di rimborso è

$$136 - (136 - 132.38) \cdot 0.125 = 135.5475.$$

Il titolo viene rivenduto il 31/12/2020, dopo che sono state incassate 5 cedole.

Per il calcolo del rendimento effettivo i_{eff} a seguito del reinvestimento delle cedole occorre uguagliare il montante del valore investito per l'acquisto del titolo al montante che proviene dal reinvestimento delle cedole e dal valore netto di rimborso del titolo stesso. Il montante del valore investito è (i tempi sono ora misurati in anni)

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-125/360+5/2+2/12}.$$

Tenendo conto che il tasso di interesse a credito è dell'1% e il corrispondente tasso semestrale è $0.01_{1/2} = 0.004987562$, il montante delle cedole reinvestite è dato da

$$M = 3.9375 \cdot a_{\overline{5}|0.01_{1/2}}(1 + 0.01_{1/2})^{5+2/6} = 19.9179.$$

Quindi l'equazione è

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-125/360+5/2+2/12} = M + \mathrm{C_N}$$

da cui

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M + \mathrm{C_N}}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(-125/360+5/2+2/12)} - 1 = \left(\frac{19.9179 + 135.5475}{135.114}\right)^{1/(-125/360+5/2+2/12)} - 1 = 0.062358.$$

ESERCIZIO 4. Si considerino i seguenti due progetti di investimento:

A.	-15	5	-2	15	X
	0	1	2	3	4

B.	-10	-1	6	6	5
	0	1	2	3	4

Ipotizzando un tasso esterno annuo del 15%, si determini il valore X_0 di X per cui i due progetti sono equivalenti in base al criterio del REA/VAN. Si dica anche se per tale valore X_0 i due progetti sono convenienti rispetto all'investimento di denaro.

Si dica poi se i flussi dei due progetti consentono di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento per entrambi. Con $X = X_0$ si dica se ci sono elementi per affermare che i due TIR sono uguali e infine si dia una limitazione inferiore e superiore per il valore del TIR di entrambi.

✎

Al tasso di valutazione del 15% si ha

$$\mathrm{REA}_A(0.15) = -15 + \frac{5}{1.15} - \frac{2}{1.15^2} + \frac{15}{1.15^3} + \frac{X}{1.15^4} = -2.30172 + \frac{X}{1.15^4}$$

e

$$\mathrm{REA}_B(0.15) = -10 - \frac{1}{1.15} + \frac{6}{1.15^2} + \frac{6}{1.15^3} + \frac{5}{1.15^4} = 0.47116.$$

Uguagliando le due quantità trovate ricaviamo X:

$$X_0 = (0.47116 + 2.30172) \cdot 1.15^4 = 4.84978.$$

Per tale valore X_0 i due progetti hanno un REA positivo e quindi sono convenienti rispetto all'investimento di denaro.

L'unicità del TIR è garantita dal comportamento del segno dei flussi cumulati. Questi sono

$$\text{per il progetto } A: \quad -15\ ,\ -10\ ,\ -12\ ,\ +3\ ,\ 3 + X_0 \ (\text{positivo})$$

e

$$\text{per il progetto } B: \quad -10\ ,\ -11\ ,\ -5\ ,\ +1\ ,\ +6.$$

Per entrambi c'è un solo cambiamento di segno e questa è una condizione che assicura l'unicità del TIR.

Con $X = X_0$ sappiamo che i due REA sono uguali ma non abbiamo elementi per affermare che i due TIR sono uguali. Le due funzioni del REA, cioè $\text{REA}_A(i)$ e $\text{REA}_B(i)$, hanno lo stesso valore per $i = 0.15$ (0.47116), ma non per questo si annullano nello stesso valore del tasso.

Infine cerchiamo una limitazione inferiore e superiore per il valore del TIR di entrambi.

Possiamo già dire che il TIR di entrami è maggiore del 15% e quindi questa è una limitazione inferiore. Provando con un tasso del 16% si ottiene

$$\text{REA}_A(0.16) = -15 + \frac{5}{1.16} - \frac{2}{1.16^2} + \frac{15}{1.16^3} + \frac{X_0}{1.16^4} = 0.1123$$

e

$$\text{REA}_B(0.16) = -10 - \frac{1}{1.16} + \frac{6}{1.16^2} + \frac{6}{1.16^3} + \frac{5}{1.16^4} = 0,2023.$$

Quindi una migliore limitazione inferiore è il 16%. Provando con un tasso del 17% si ottiene

$$\text{REA}_A(0.17) = -15 + \frac{5}{1.17} - \frac{2}{1.17^2} + \frac{15}{1.17^3} + \frac{X_0}{1.17^4} = -0,2339$$

e

$$\text{REA}_B(0.17) = -10 - \frac{1}{1.17} + \frac{6}{1.17^2} + \frac{6}{1.17^3} + \frac{5}{1.17^4} = -0,0571.$$

Pertanto possiamo dire che i TIR di entrambi i progetti sono compresi tra il 16% e il 17%.