Svolgimento dei temi d'esame di MDEF
Anno Accademico 2018/19

Alberto Peretti

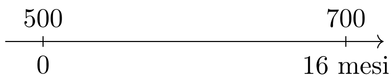
Settembre 2019

PROVA INTERMEDIA di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 07/11/2018

ESERCIZIO 1. Si supponga che nel RIS e nel RIC siano ritenuti equivalenti 500€ in $t = 0$ e 700€ in $t = 16$ mesi. Si determinino i due tassi di interesse annui.

Si determinino poi nei due regimi i due tassi di sconto semestrali equivalenti.

Il semplice schema che esprime l'equivalenza dei due importi nel tempo è il seguente



(a) Nel RIS l'equazione del valore è

$$500\left(1 + i \cdot \frac{16}{12}\right) = 700$$

da cui si ricava

$$i \cdot \frac{16}{12} = \frac{700}{500} - 1 \quad ; \quad i = \left(\frac{700}{500} - 1\right) \cdot \frac{12}{16} = 0.3 = 30\%.$$

(b) NEL RIC l'equazione del valore è

$$500(1 + i)^{16/12} = 700$$

da cui si ricava

$$(1 + i)^{16/12} = \frac{700}{500} \quad ; \quad i = \left(\frac{700}{500}\right)^{12/16} - 1 = 0.287051801 = 28.71\%.$$

Passiamo ai tassi di sconto.

(a) Nel RIS

$$i_{1/2} = \frac{i}{2} = 0.15 \quad ; \quad d_{1/2} = \frac{i_{1/2}}{1 + i_{1/2}} = 0.130434782 = 13.04\%.$$

(b) Nel RIS

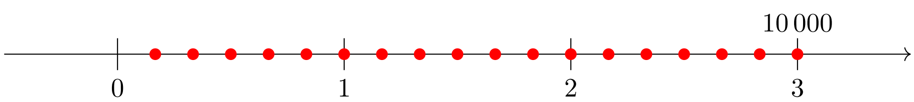
$$i_{1/2} = (1 + i)^{1/2} - 1 = 0.134483054 \quad ; \quad d_{1/2} = \frac{i_{1/2}}{1 + i_{1/2}} = 0.118541263 = 11.85\%.$$

ESERCIZIO 2. Per costituire un capitale di 10 000€ alla fine del 3° anno verso nei 3 anni rate bimestrali immediate posticipate. Si determini a quanto deve ammontare la rata, ipotizzando un tasso di interesse annuo del 10%.

Si determini poi il nuovo valore della rata se la prima è tra 6 mesi.

Supponendo infine di poter versare nel piano di accumulo con rate immediate alla fine del 1° anno, oltre alla rata, altri 3 000€, di quanto si abbassa il numero di rate per costituire lo stesso capitale alla stessa scadenza?

Può essere utile rappresentare lo schema dei versamenti.



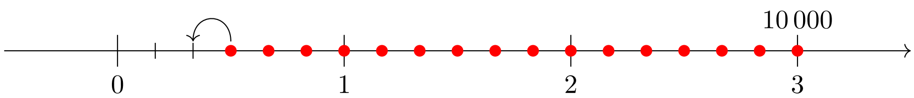
Le rate bimestrali sono 18. Indicando con R la rata, l'equazione del valore è quindi

$$R \cdot \mathrm{a}_{\overline{18}|i_{1/6}}(1 + i)^3 = 10\,000.$$

Dato che $i_{1/6} = (1 + 0.1)^{1/6} - 1 = 0.016011867$, si trova

$$R = \frac{10\,000}{a_{\overline{18}|i_{1/6}}(1+i)^3} = 483.74.$$

Con la prima rata tra 6 mesi (e le altre caratteristiche inalterate) lo schema è



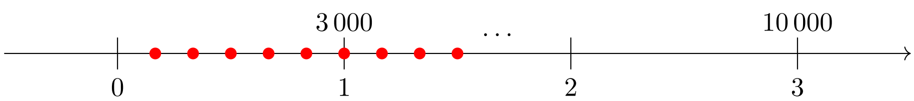
le rate si riducono a 16 e l'equazione del valore diventa

$$R \cdot a_{\overline{16}|i_{1/6}}(1 + i_{1/6})^{-2}(1+i)^3 = 10\,000,$$

da cui si ricava

$$R = \frac{10\,000}{a_{\overline{16}|i_{1/6}}(1 + i_{1/6})^{-2}(1+i)^3} = 553.32.$$

La terza modalità torna a considerare rate immediate, cioè come nella prima modalità. La novità è nell'ulteriore versamento aggiuntivo di 3 000€ alla fine del 1° anno. Ovviamente questo versamento fa diminuire il numero di rate, che ora diventa la quantità da determinare. Attenzione che le altre modalità restano inalterate, in particolare che il capitale di 10 000€ deve essere accumulato alla fine del 3° anno. Uno schema è ora questo:



Detta ancora R la rata (quella della prima modalità), per poter accumulare il capitale occorre che

$$\left(R \cdot a_{\overline{n}|i_{1/6}} + 3\,000(1+i)^{-1}\right)(1+i)^3 \geq 10\,000,$$

che equivale a

$$R \cdot a_{\overline{n}|i_{1/6}}(1+i)^3 + 3\,000(1+i)^2 \geq 10\,000 \quad ; \quad a_{\overline{n}|i_{1/6}} \geq \frac{10\,000 - 3\,000(1+i)^2}{R(1+i)^3} \quad \Big(= A = 9.893486753 \Big).$$

La disequazione equivale a sua volta alle

$$\frac{1 - (1 + i_{1/6})^{-n}}{i_{1/6}} \geq A \quad \Leftrightarrow \quad 1 - (1 + i_{1/6})^{-n} \geq i_{1/6}A \quad \Leftrightarrow \quad (1 + i_{1/6})^{-n} \leq 1 - i_{1/6}A$$

e ancora, applicando i logaritmi,

$$-n \ln(1 + i_{1/6}) \leq \ln(1 - i_{1/6}A) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1 - i_{1/6}A)}{\ln(1 + i_{1/6})} = 10.85.$$

Questo dice che 11 è il numero minimo di rate intere che permettono di accumulare il capitale. Il numero di rate si abbassa di tre unità.

ESERCIZIO 3. Una società finanziaria, relativamente ad un bene con prezzo di listino $P = 20\,000$€, vuole proporre ad un cliente un contratto di leasing di durata 3 anni che prevede un anticipo del 10% del prezzo di listino, un riscatto pari al 5% del prezzo di listino e il versamento di 9 canoni quadrimestrali posticipati. La società può avere uno sconto del 10% sull'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto un tasso di interesse annuo del 10%. Si scriva l'equazione del valore per la società di leasing e si determini a quanto deve ammontare il canone da proporre al cliente.

Sapendo che il cliente può avere uno sconto del 2% sull'acquisto del bene, si scriva l'equazione del valore per il cliente. Sapendo infine che il cliente per l'acquisto diretto del bene può avere un prestito dalla sua banca al tasso di interesse annuo dell'8%, si dica se egli ragionevolmente sceglierà il prestito bancario o il contratto di leasing.

✎

Le quantità rilevanti nel contratto sono l'anticipo $A = 20\,000 \cdot 0.1 = 2\,000$€ e il riscatto finale $F = 20\,000 \cdot 0.05 = 1\,000$€.

La società finanziaria spende $20\,000 \cdot (1 - 0.1) = 18\,000$€ per l'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto di leasing un tasso di interesse del 10%.

Detto i il tasso di interesse del 10%, serve il tasso di interesse quadrimestrale $i_{1/3} = 1.1^{1/3} - 1 = 0.032280115$.

Indicato con R il canone quadrimestrale, l'equazione del valore per la società di leasing è

$$18\,000 = 2\,000 + R \cdot \mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/3}} + 1\,000(1+i)^{-3}.$$

Da questa si ricava

$$R = \frac{18\,000 - 2\,000 - 1\,000(1+i)^{-3}}{\mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/3}}} = 1\,979.33\text{€}.$$

Ora passiamo alla valutazione del cliente, al quale viene proposto un contratto di leasing con le caratteristiche ottenute poco fa (cioè un anticipo di 2 000€, un riscatto finale di 1 000€ e un canone di 9 rate quadrimestrali di 1 979.33€). Tenendo conto che il cliente può avere uno sconto del 2% sul prezzo d'acquisto del bene (sconto di 400€), egli è interessato a scoprire qual è il tasso implicito nell'equivalenza finanziaria tra lo spendere oggi $20\,000 - 400 = 19\,600$€ e distribuire il pagamento nel tempo alle condizioni del contratto.

La sua equazione del valore è quindi

$$19\,600 = 2\,000 + 1\,979.33\mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/3}} + 1\,000(1+i)^{-3},$$

con un tasso i questa volta incognito.

La soluzione esatta di questa equazione fornirebbe al cliente un valore preciso da confrontare con il tasso dell'8% proposto dalla banca per un prestito di 19 600€. Ma la risoluzione esatta (in realtà approssimata) di questa equazione richiederebbe l'uso di approssimazioni successive, eventualmente con il metodo di Newton, e non è richiesta.

Per poter dire quale sarà la scelta ragionevole del cliente tra stipulare il contratto di leasing e chiedere un prestito alla banca al tasso $i^{(B)} = 8\%$ possiamo semplicemente calcolare il valore attuale degli importi relativi al contratto al tasso della banca. Dopo aver calcolato il tasso equivalente quadrimestrale $i_{1/3}^{(B)} = 0.025985568$, si trova

$$2\,000 + 1\,979.33\mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/3}^{(B)}} + 1\,000(1+i^{(B)})^{-3} = 18\,497.70\text{€}.$$

Dato che $18\,497.70 < 19\,600$, il tasso della banca sconta maggiormente gli importi rispetto al tasso effettivo incognito e quindi il tasso della banca è maggiore rispetto al tasso del contratto.

Il cliente ragionevolmente sceglierà il contratto di leasing.

ESERCIZIO 4. Si scriva il piano di ammortamento di un debito di 10 000€ mediante 3 rate annue (da determinare), con quote capitale e quote interessi entrambe posticipate, sapendo che ogni anno la rata aumenta del 50%, Si assuma un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Si scriva poi il nuovo piano di ammortamento dello stesso debito (con lo stesso tasso) attraverso rate con anticipazione degli interessi e quote capitale (da determinare) che aumentano ogni anno del 50%.

✎

Con la prima modalità sappiamo che, se la prima rata di ammortamento è R, la seconda è $1.5R$ e la terza 1.5^2R. L'equazione del valore per l'intero piano è quindi

$$R(1+i)^{-1} + 1.5R(1+i)^{-2} + 1.5^2R(1+i)^{-3} = 10\,000,$$

da cui possiamo ricavare

$$R = \frac{10\,000}{(1+i)^{-1} + 1.5(1+i)^{-2} + 1.5^2(1+i)^{-3}} = 2\,604.70\text{€}.$$

Abbiamo quindi $R_1 = 2\,604.70$€, $R_2 = 1.5R_1 = 3\,907.05$€ e $R_3 = 1.5R_2 = 5\,860.58$€.

Ricordando ora che, detto $D_0 = 10\,000$€ il debito residuo iniziale, la prima quota interessi è $I_1 = iD_0 = 1\,000$€, possiamo calcolare in sequenza le quantità mancanti

$$\begin{aligned} C_1 &= R_1 - I_1 = 2\,604.70 - 1\,000 = 1\,604.70€ \\ D_1 &= D_0 - C_1 = 10\,000 - 1\,604.70 = 8\,395.30€ \\ I_2 &= i \cdot D_1 = 0.1 \cdot 8\,395.30 = 839.53€ \\ C_2 &= R_2 - I_2 = 3\,907.05 - 839.53 = 3\,067.52€ \\ D_2 &= D_1 - C_2 = 8\,395.30 - 3\,067.52 = 5\,327.78€ \\ I_3 &= i \cdot D_2 = 0.1 \cdot 5\,327.78 = 532.78€ \\ C_3 &= R_3 - I_3 = 5\,860.58 - 532.78 = 5\,327.80€ \end{aligned}$$

da cui $D_3 = D_2 - C_3 = 0$ (salvo arrotondamenti). Il piano è dunque il seguente.

t	$R_k = C + I_k$	C	I_k	D_k
0	0	0	0	10 000
1	2 604.70	1 604.70	1 000	8 395.30
2	3 907.05	3 067.52	839.53	5 327.78
3	5 860.58	5 327.80	532.78	0

Con la seconda modalità sappiamo invece che, se la prima quota capitale è C, la seconda è $1.5C$ e la terza 1.5^2C. Ricordando che la somma delle quote capitale deve dare il debito iniziale, l'equazione è

$$C + 1.5C + 1.5^2C = 10\,000, \text{ da cui si ricava } C = \frac{10\,000}{1 + 1.5 + 1.5^2} = 2\,105.26€.$$

Abbiamo quindi $C_1 = 2\,105.26$€, $C_2 = 1.5C_1 = 3\,157.89$€ e $C_3 = 1.5C_2 = 4\,736.84$€.

Ricordando ora che gli interessi sono anticipati e che si ottengono dal debito residuo corrispondente attraverso il tasso di sconto d, abbiamo

$$I_0 = d \cdot D_0 = \frac{0.1}{1 + 0.1} \cdot 10\,000 = 0.\overline{09} \cdot 10\,000 = 909.09€.$$

Ora possiamo in sequenza ricavare le altre quantità. Si perviene al piano seguente

t	$R_k = C + I_k$	C	I_k	D_k
0	909.09	0	909.09	10 000
1	2 822.96	2 105.26	717.70	7 894.74
2	3 588.51	3 157.89	430.62	4 736.85
3	4 736.84	4 736.84	0	0

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 21/01/2019

ESERCIZIO 1. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/01/2018 con le seguenti caratteristiche:
- valore facciale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza tra 4 anni;
- cedole quadrimestrali con tasso cedolare $r = 3\%$;
- prezzo di emissione $P_0 = 99$.

Si determini una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza ytm all'emissione e si dica se il vero tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 3%. Sempre utilizzando la prima approssimazione, si dica di quanto varia in percentuale il tasso di rendimento a scadenza se introduciamo la tassazione.

Si determini poi il prezzo tel quel dell'obbligazione il 01/09/2018 ipotizzando un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 2.5%. (Qui non si consideri la tassazione e si usi l'anno commerciale.)

Ponendo $F = 100$, $n = 12$ (cedole quadrimestrali), $C = 100$, $r = 0.03$, $P_0 = 99$, senza considerare la tassazione, la formula per una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza fornisce

$$ytm_0^{\text{NOTAX}} = \frac{\frac{r}{3}F + (C - P_0)/n}{(C + 2P_0)/3} = \frac{\frac{0.03}{3}\cdot 100 + (100-99)/12}{(100 + 2\cdot 99)/3} = 0.01090604 \text{ (è un tasso quadrimestrale)},$$

equivalente ad un tasso annuo $i = 0.033076243$.

Dobbiamo ora dire se il vero tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 3%. L'equazione che definisce il vero tasso di rendimento a scadenza è

$$99 = 1 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/3}} + 100(1+i)^{-4}.$$

Se calcoliamo il termine di destra per $i = 3\%$ (quindi $i_{1/3} = 0.009901634$) si ottiene il valore $100.11 > 99$. Ricordando che il temine di destra è decrescente al crescere di i, significa che il vero tasso di rendimento a scadenza è maggiore del 3%.

Consideriamo ora la tassazione e ritroviamo la prima approssimazione del tasso. Indicando con γ l'aliquota del 12.50%, cioè $\gamma = 0.125$, la cedola netta è

$$\text{Ced} = \frac{r}{3}F(1-\gamma) = 1 \cdot 0.875 = 0.875.$$

La tassazione colpisce anche il capitale in quanto il valore di rimborso $C = 100$ supera il prezzo di acquisto $P = 99$. Pertanto il rimborso netto è

$$\text{Cn} = 100 - (100 - 99)\cdot 0.125 = 99.875.$$

La formula per la prima approssimazione fornisce ora

$$ytm_0^{\text{TAX}} = \frac{\text{Ced} + (\text{Cn} - P_0)/n}{(\text{Cn} + 2P_0)/3} = \frac{0.875 + (99.875 - 99)/12}{(99.875 + 2\cdot 99)/3} = 0.009546789 \text{ (è un tasso quadrimestrale)},$$

equivalente ad un tasso annuo $i = 0.028914662$.

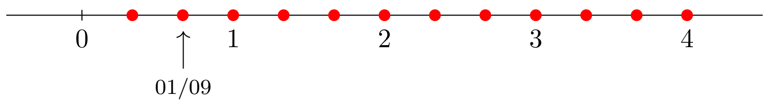
Dobbiamo ora dire di quanto varia in percentuale il tasso di rendimento a scadenza con la tassazione (rispetto alla non tassazione). Quanto richiesto è dato da

$$\frac{\Delta i}{i} = \frac{ytm_0^{\text{TAX}} - ytm_0^{\text{NOTAX}}}{ytm_0^{\text{NOTAX}}} = \frac{0.028914662 - 0.033076243}{0.033076243} = -0.1258\ (-12.58\%).$$

Veniamo all'ultima domanda: il prezzo tel quel dell'obbligazione il 01/09/2018, nell'ipotesi che il tasso di rendimento a scadenza in quella data sia del 2.5% (no tassazione e anno commerciale). Può essere utile una rappresentazione (vedi pagina seguente), dove in rosso sono indicate le cedole.

Alla data del 01/09 vi saranno ancora 10 cedole da incassare. Quindi, con $ytm = 0.025$, cui corrisponde un $ytm_{1/3} = 0.008264838$, il prezzo tel quel è dato da

$$P_{\text{tq}} = 1 \cdot a_{\overline{10}|ytm_{1/3}} + 100(1 + ytm_{1/3})^{-10} = 101.659.$$

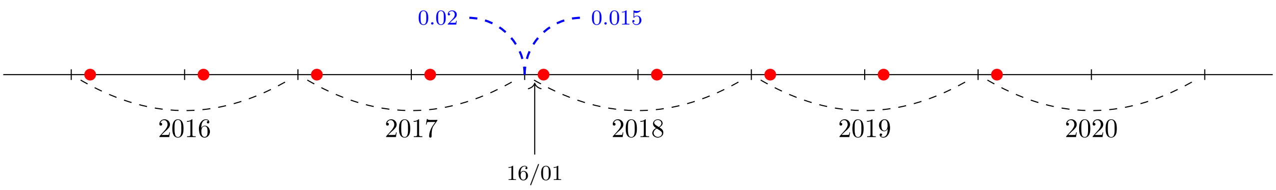


ESERCIZIO 2. Il B.T.P. denominato `Btp-1fb20 4,5%`, con scadenza il 01/02/2020, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 4.5\%$. Il 16/01/2018 era quotato (corso secco) a 109.38. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 01/01/2016 al prezzo $P = 106$, di aver reinvestito le cedole per i primi due anni al tasso del 2% e di continuare a farlo fino alla scadenza al tasso del 1.5%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Si consideri la tassazione.)

✎

Il titolo paga le cedole al 01/02 e al 01/08. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dalla data di acquisto del 01/01/2016.



Non consideriamo la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.045}{2} \cdot 100 = 2.25.$$

La prima domanda fa riferimento alla data del 16/01/2018, in cui viene fornita la quotazione (corso secco P_s) di 109.38. Il numero di cedole ancora da incassare a quella data è $n = 5$. Il tempo t tra la cedola precedente e la data del 16/01/2018: sono 5 mesi e 16 giorni, quindi $t = 30 \cdot 5 + 16 = 166$ giorni.

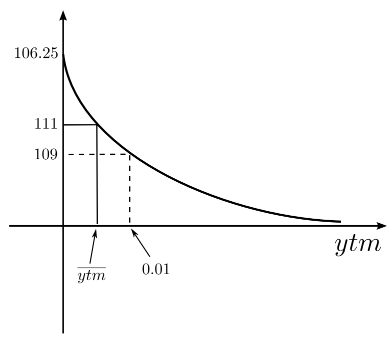
Il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\text{tq}} = P_s + \text{rateo} = 109.38 + 2.25 \cdot \frac{166}{180} = 111.455.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 2.25 \cdot a_{\overline{5}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{166/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-5+166/180}.$$

Come si sa il calcolo della soluzione esatta è problematico. Viene chiesto solo di dire se il tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. Basta calcolare il termine di destra al tasso dell'1% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente $0.01_{1/2} = 0.004987562$): si trova il valore $109.126 < 111.455$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza ($\overline{ytm}$ nella figura a fianco) era minore dell'1%.



Passiamo ora alla seconda domanda. L'ipotesi è di aver acquistato il titolo in data 01/01/2016 al prezzo (tel quel) $P = 106$, di aver reinvestito le cedole al tasso del 2% fino a tutto il 2017 e successivamente, fino alla scadenza, al tasso del 1.5%. Dobbiamo trovare, considerando la tassazione, il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

Questa volta le cedole da considerare sono 9 (4 cadono nel primo periodo e 5 nel secondo). Serve la cedola netta.

$$\textsc{Ced} = 2.25(1 - 0.125) = 1.96875.$$

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/02/2020, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$M_0 = 106(1+i_{\text{eff}})^{4+1/12}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2017, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 4 cedole da valutare al tasso $i^{(1)} = 2\%$ (montante M_1) e le restanti 5 cedole al tasso $i^{(2)} = 1.5\%$ (montante M_2). Usiamo "a figurato" in entrambi i casi.

Servono i tassi semestrali equivalenti

$$i^{(1)}_{1/2} = 0009950494 \qquad \text{e} \qquad i^{(2)}_{1/2} = 0.007472084.$$

Si ha (attenzione ai tassi e alla corrispondente misura dei tempi)

$$M_1 = \text{Ced} \cdot a_{\overline{4}|i^{(1)}_{1/2}} \left(1+i^{(1)}_{1/2}\right)^{5-1/6} \cdot \left(1+i^{(2)}\right)^{2+1/12} = 8.313456476$$

e

$$M_2 = \text{Ced} \cdot a_{\overline{5}|i^{(2)}_{1/2}} \cdot \left(1+i^{(2)}_{1/2}\right)^{5} = 9.991959958.$$

L'equazione è pertanto

$$106(1+i_{\text{eff}})^{4+1/12} = M_1 + M_2 + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1+M_2+100}{106}\right)^{1/(4+1/12)} - 1 = 0.027262252.$$

ESERCIZIO 3. L'acquisto di un bene venduto al prezzo di listino di 12 000€ può avvenire o con pagamento immediato con lo sconto dell'1%, oppure con un finanziamento di 7 000€ da restituire in 12 rate mensili costanti (posticipate) di 600€. Le spese accessorie per il contratto di finanziamento ammontano a 80€. Si confrontino le due possibilità mediante il criterio del R.E.A. con un tasso esterno del 10%.

Si calcoli una prima approssimazione del T.A.N. (Tasso Annuo Nominale) e si dica se questa è per difetto o per eccesso. Si trovi poi una prima approssimazione del T.A.E.G. (Tasso Annuo Effettivo Globale) dell'operazione. Si dia infine anche una stima del tasso effettivo di costo i_{eff} su base annua dell'acquisto attraverso il finanziamento, determinando se tale tasso è maggiore o minore del 10%.

✎

Indichiamo con A la prima modalità, cioè il pagamento immediato con lo sconto, e con B la seconda, cioè con il finanziamento.

Il REA della modalità A è

$$\text{REA}_A(0.1) = -12\,000(1-0.01) = -11\,880.$$

La modalità B prevede, dato che il prezzo di listino è 12 000€, il pagamento immediato della parte non finanziata, cioè 5 000€, il pagamento immediato delle spese accessorie del contratto di finanziamento, cioè 80€, e le 12 rate mensili posticipate di 600€.

Il REA della modalità B è pertanto (indico col simbolo $0.1_{1/12}$ il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 10%)

$$\text{REA}_B(0.1) = -5\,000 - 80 - 600 \cdot a_{\overline{12}|0.1_{1/12}} = -11\,920.29.$$

La modalità A è quindi preferibile alla modalità B.

Per il calcolo del T.A.N. sottostante il contratto di finanziamento, cioè il tasso di costo della possibilità di pagare attraverso il finanziamento rispetto al pagamento del prezzo di listino, l'equazione da considerare è

$$12\,000 = 5\,000 + 600 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 7\,000 = 600 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

Questa equivale chiaramente all'equazione del valore attuale di una rendita ($V_0 = Ra_{\overline{n}|i}$), in cui l'incognita è il tasso. Abbiamo studiato una formula che fornisce una prima approssimazione della soluzione, ed è

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R} = \frac{2(12 - 7\,000/600)}{13 \cdot 7\,000/600} = 0.004395604 \text{ (tasso mensile)},$$

al quale corrisponde un tasso annuo $\mathrm{TAN}_0 = 0.054041331$.

Per dire se si tratta di un'approssimazione per difetto o per eccesso torniamo a considerare l'equazione

$$7\,000 = 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}$$

e calcoliamo il termine di destra con il tasso approssimato appena ottenuto. Si ottiene $6\,998.44 < 7\,000$. L'approssimazione è pertanto per eccesso.

Per il calcolo del T.A.E.G. le cose sono simili, cambia solo il termine di destra dell'equazione, dato che dobbiamo considerare anche i costi accessori del contratto. L'equazione è ora

$$12\,000 = 5\,000 + 80 + 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 6\,920 = 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

La formula di approssimazione fornisce ora

$$i_0 = \frac{2(12 - 6\,920/600)}{13 \cdot 6\,920/600} = 0.006224988 \text{ (tasso mensile)},$$

che, convertito nell'equivalente tasso annuo, fornisce $\mathrm{TAEG}_0 = 0.077311218$.

Vediamo ora il tasso effettivo. Questo esce dal confronto tra le due effettive possibilità, cioè il contratto di finanziamento oppure il pagamento immediato del prezzo scontato. L'equazione che definisce il tasso effettivo i^{eff} è

$$11\,880 = 5\,000 + 80 + 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i^{\mathrm{eff}}_{1/12}}.$$

La valutazione del termine di destra con un tasso di prova del 10% ($0.1_{1/12} = 0.00797414$) è

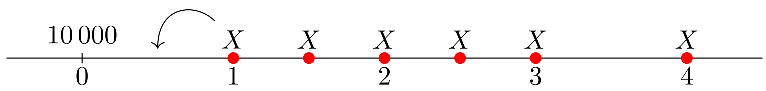
$$11\,920 > 11\,880$$

e quindi il tasso effettivo è maggiore del 10%.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 21/01/2019

ESERCIZIO 1. Posso restituire un prestito di 10 000€ in 4 anni mediante 5 rate semestrali costanti, la prima delle quali tra un anno, e un ulteriore versamento dello stesso importo alla fine del quarto anno. Nell'ipotesi che il tasso di interesse annuo applicato sia $i = 10\%$, si determini l'ammontare del suddetto importo.

Nell'ipotesi invece di poter restituire metà del prestito tra un anno e il resto con successive rate trimestrali posticipate di 400€, con quante rate intere e quale residuo, allo stesso tasso, posso restituire il prestito?



Vista la cadenza delle prime rate conviene calcolare il tasso semestrale equivalente al tasso annuo $i = 10\%$:

$$i_{1/2} = 1.1^{1/2} - 1 = 0.04880884.$$

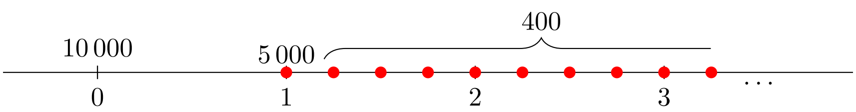
Indicato con X, come in figura, il valore dell'importo incognito, l'equazione del valore è

$$10\,000 = X \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|i_{1/2}} \left(1 + i_{1/2}\right)^{-1} + X(1+i)^{-4},$$

da cui si ricava

$$X = \frac{10\,000}{\mathrm{a}_{\overline{5}|i_{1/2}} \cdot \left(1 + i_{1/2}\right)^{-1} + (1+i)^{-4}} = 2\,072.70€.$$

Passiamo alla seconda modalità di restituzione del prestito. Una figura che illustra la nuova situazione è



Per poter restituire il prestito occorre che

$$5\,000(1+i)^{-1} + 400 \cdot \mathrm{a}_{\overline{n}|i_{1/4}}(1+i)^{-1} \geq 10\,000$$

che equivale a

$$\mathrm{a}_{\overline{n}|i_{1/4}} \geq \frac{10\,000 - 5\,000(1+i)^{-1}}{400(1+i)^{-1}} = \frac{10\,000(1+i) - 5\,000}{400} \quad \Big(= 15 = A \Big).$$

La disequazione equivale a sua volta alle

$$\frac{1 - (1 + i_{1/4})^{-n}}{i_{1/4}} \geq A \quad \Leftrightarrow \quad 1 - (1 + i_{1/4})^{-n} \geq i_{1/4}A \quad \Leftrightarrow \quad (1 + i_{1/4})^{-n} \leq 1 - i_{1/4}A$$

e ancora, applicando i logaritmi,

$$-n \ln(1 + i_{1/4}) \leq \ln(1 - i_{1/4}A) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1 - i_{1/4}A)}{\ln(1 + i_{1/4})} = 18.84.$$

Questo dice che per restituire il prestito servono $n = 18$ rate intere più un residuo.

Con $n = 18$ si ha

$$5\,000(1+i)^{-1} + 400 \cdot \mathrm{a}_{\overline{18}|i_{1/4}}(1+i)^{-1} = 9\,804.97€.$$

Pertanto

$$10\,000 - 9\,804.97 = 195.03€$$

è il residuo calcolato al tempo $t = 0$. Se vogliamo il valore da versare unitamente all'ultima rata basta capitalizzare per il tempo $t = 1 + 18 \cdot \frac{1}{4}$:

$$195.03 \cdot (1+i)^{1+18/4} = 329.43€.$$

ESERCIZIO 2. Si scriva il piano di ammortamento di un debito di 10 000€ mediante 2 rate (da determinare) $R_1 = R$ e $R_3 = 3R$ (pagate alla fine del 1° e del 3° anno, quindi $R_0 = R_2 = 0$), con quote capitale e quote interessi entrambe posticipate. Si assuma un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Si scriva poi il nuovo piano di ammortamento dello stesso debito attraverso rate con anticipazione degli interessi e quote capitale (da determinare) $C_1 = C$ e $C_3 = 3C$ (quindi $C_0 = C_2 = 0$).

✎

Con rate $R_1 = R$ e $R_3 = 3R$ e $R_0 = R_2 = 0$ possiamo determinare subito il valore R. L'equazione del valore per l'intero piano è

$$R(1+i)^{-1} + 3R(1+i)^{-3} = 10\,000,$$

da cui possiamo ricavare

$$R = \frac{10\,000}{(1+i)^{-1} + 3(1+i)^{-3}} = 3\,161.52€.$$

Abbiamo quindi $R_1 = 3\,161.52€$ e $R_3 = 3R_1 = 9\,484.56€$.

Ricordando ora che, detto $D_0 = 10\,000€$ il debito residuo iniziale, la prima quota interessi è $I_1 = iD_0 = 1\,000€$, possiamo calcolare in sequenza le quantità mancanti:

$$\begin{aligned}
C_1 &= R_1 - I_1 = 3\,161.52 - 1\,000 = 2\,161.52€\\
D_1 &= D_0 - C_1 = 10\,000 - 2\,161.52 = 7\,838.48€\\
I_3 &= D_1(1+i)^2 - D_1 = 1\,646.08€\\
C_3 &= R_3 - I_3 = 9\,484.56 - 1\,646.08 = 7\,838.48€
\end{aligned}$$

Pertanto il piano è il seguente:

t	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	10 000
1	3 161.52	2 161.52	1 000	7 838.48
2	0	0	0	7 838.48
3	9 484.56	7 838.48	1 646.08	0

Con la seconda modalità abbiamo invece anticipazione degli interessi e quote capitale $C_1 = C$ e $C_3 = 3C$ (con $C_0 = C_2 = 0$).

Intanto abbiamo la prima quota interessi

$$I_0 = 10\,000 \cdot d = 10\,000 \cdot \frac{i}{1+i} = 909.09€.$$

Poi, dato che la somma delle quote capitale deve uguagliare il debito, si ha l'equazione

$$C + 3C = 10\,000, \text{ da cui } C = 2\,500€.$$

Gli interessi sono anticipati e si ottengono sempre dal debito residuo corrispondente attraverso il tasso di sconto d.

Il piano è ora il seguente:

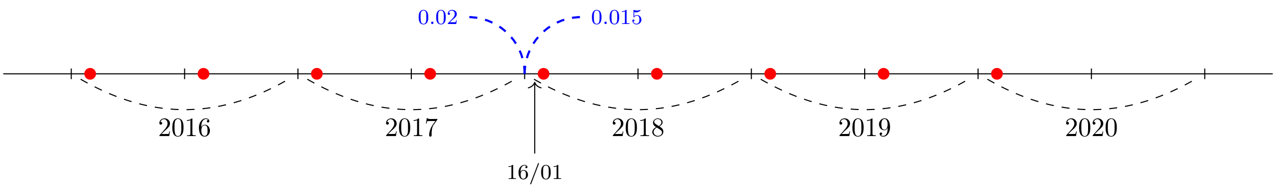
t	R_k	C_k	I_k	D_k
0	909.09	0	909.09	10 000
1	3 181.82	2 500	681.82	7 500
2	681.82	0	681.82	7 500
3	7 500	7 500	0	0

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. denominato `Btp-1fb20 4,5%`, con scadenza il 01/02/2020, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 4.5\%$. Il 16/01/2018 era quotato (corso secco) a 109.38. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 01/01/2016 al prezzo $P = 106$, di aver reinvestito le cedole per i primi due anni al tasso del 2% e di continuare a farlo fino alla scadenza al tasso del 1.5%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Si consideri la tassazione.)

✎

Il titolo paga le cedole al 01/02 e al 01/08. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dalla data di acquisto del 01/01/2016.



Non consideriamo la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.045}{2} \cdot 100 = 2.25.$$

La prima domanda fa riferimento alla data del 16/01/2018, in cui viene fornita la quotazione (corso secco P_s) di 109.38. Il numero di cedole ancora da incassare a quella data è $n = 5$. Il tempo t tra la cedola precedente e la data del 16/01/2018: sono 5 mesi e 16 giorni, quindi $t = 30 \cdot 5 + 16 = 166$ giorni.

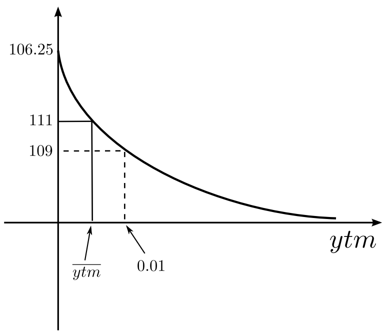
Il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\text{tq}} = P_s + \text{rateo} = 109.38 + 2.25 \cdot \frac{166}{180} = 111.455.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 2.25 \cdot a_{\overline{5}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{166/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-5+166/180}.$$

Come si sa il calcolo della soluzione esatta è problematico. Viene chiesto solo di dire se il tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. Basta calcolare il termine di destra al tasso dell'1% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente $0.01_{1/2} = 0.004987562$): si trova il valore $109.126 < 111.455$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza ($\overline{ytm}$ nella figura a fianco) era minore dell'1%.



Passiamo ora alla seconda domanda. L'ipotesi è di aver acquistato il titolo in data 01/01/2016 al prezzo (tel quel) $P = 106$, di aver reinvestito le cedole al tasso del 2% fino a tutto il 2017 e successivamente, fino alla scadenza, al tasso del 1.5%. Dobbiamo trovare, considerando la tassazione, il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

Questa volta le cedole da considerare sono 9 (4 cadono nel primo periodo e 5 nel secondo). Serve la cedola netta.

$$\textsc{Ced} = 2.25(1 - 0.125) = 1.96875.$$

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/02/2020, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$M_0 = 106(1 + i_{\text{eff}})^{4+1/12}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2017, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 4 cedole da valutare al tasso $i^{(1)} = 2\%$ (montante M_1) e le restanti 5 cedole al tasso $i^{(2)} = 1.5\%$ (montante M_2). Usiamo "a figurato" in entrambi i casi.

Servono i tassi semestrali equivalenti

$$i^{(1)}_{1/2} = 0009950494 \qquad \text{e} \qquad i^{(2)}_{1/2} = 0.007472084.$$

Si ha (attenzione ai tassi e alla corrispondente misura dei tempi)

$$M_1 = \text{C}\textsc{ed} \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|i^{(1)}_{1/2}} \left(1 + i^{(1)}_{1/2}\right)^{5-1/6} \cdot \left(1 + i^{(2)}\right)^{2+1/12} = 8.313456476$$

e

$$M_2 = \text{C}\textsc{ed} \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|i^{(2)}_{1/2}} \cdot \left(1 + i^{(2)}_{1/2}\right)^5 = 9.991959958.$$

L'equazione è pertanto

$$106(1 + i_{\text{eff}})^{4+1/12} = M_1 + M_2 + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{106}\right)^{1/(4+1/12)} - 1 = 0.027262252.$$

ESERCIZIO 4. L'acquisto di un bene venduto al prezzo di listino di 12 000€ può avvenire o con pagamento immediato con lo sconto dell'1%, oppure con un finanziamento di 7 000€ da restituire in 12 rate mensili costanti (posticipate) di 600€. Le spese accessorie per il contratto di finanziamento ammontano a 80€. Si confrontino le due possibilità mediante il criterio del R.E.A. con un tasso esterno del 10%.

Si calcoli una prima approssimazione del T.A.N. (Tasso Annuo Nominale) e si dica se questa è per difetto o per eccesso. Si trovi poi una prima approssimazione del T.A.E.G. (Tasso Annuo Effettivo Globale) dell'operazione. Si dia infine anche una stima del tasso effettivo di costo i_{eff} su base annua dell'acquisto attraverso il finanziamento, determinando se tale tasso è maggiore o minore del 10%.

✎

Indichiamo con A la prima modalità, cioè il pagamento immediato con lo sconto, e con B la seconda, cioè con il finanziamento.

Il REA della modalità A è

$$\text{REA}_A(0.1) = -12\,000(1 - 0.01) = -11\,880.$$

La modalità B prevede, dato che il prezzo di listino è 12 000€, il pagamento immediato della parte non finanziata, cioè 5 000€, il pagamento immediato delle spese accessorie del contratto di finanziamento, cioè 80€, e le 12 rate mensili posticipate di 600€.

Il REA della modalità B è pertanto (indico col simbolo $0.1_{1/12}$ il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 10%)

$$\text{REA}_B(0.1) = -5\,000 - 80 - 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|0.1_{1/12}} = -11\,920.29.$$

La modalità A è quindi preferibile alla modalità B.

Per il calcolo del T.A.N. sottostante il contratto di finanziamento, cioè il tasso di costo della possibilità di pagare attraverso il finanziamento rispetto al pagamento del prezzo di listino, l'equazione da considerare è

$$12\,000 = 5\,000 + 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 7\,000 = 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

Questa equivale chiaramente all'equazione del valore attuale di una rendita ($V_0 = R\mathrm{a}_{\overline{n}|i}$), in cui l'incognita è il tasso. Abbiamo studiato una formula che fornisce una prima approssimazione della soluzione, ed è

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R} = \frac{2(12 - 7\,000/600)}{13 \cdot 7\,000/600} = 0.004395604 \text{ (tasso mensile)},$$

al quale corrisponde un tasso annuo $\text{TAN}_0 = 0.054041331$.

Per dire se si tratta di un'approssimazione per difetto o per eccesso torniamo a considerare l'equazione

$$7\,000 = 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}$$

e calcoliamo il termine di destra con il tasso approssimato appena ottenuto. Si ottiene $6\,998.44 < 7\,000$. L'approssimazione è pertanto per eccesso.

Per il calcolo del T.A.E.G. le cose sono simili, cambia solo il termine di destra dell'equazione, dato che dobbiamo considerare anche i costi accessori del contratto. L'equazione è ora

$$12\,000 = 5\,000 + 80 + 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 6\,920 = 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

La formula di approssimazione fornisce ora

$$i_0 = \frac{2(12 - 6\,920/600)}{13 \cdot 6\,920/600} = 0.006224988 \text{ (tasso mensile)},$$

che, convertito nell'equivalente tasso annuo, fornisce $\mathrm{TAEG}_0 = 0.077311218$.

Vediamo ora il tasso effettivo. Questo esce dal confronto tra le due effettive possibilità, cioè il contratto di finanziamento oppure il pagamento immediato del prezzo scontato. L'equazione che definisce il tasso effettivo i^{eff} è

$$11\,880 = 5\,000 + 80 + 600 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i^{\text{eff}}_{1/12}}.$$

La valutazione del termine di destra con un tasso di prova del 10% ($0.1_{1/12} = 0.00797414$) è

$$11\,920 > 11\,880$$

e quindi il tasso effettivo è maggiore del 10%.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 05/02/2019

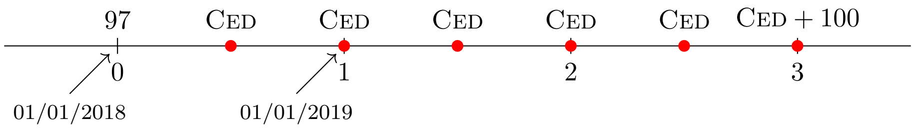
ESERCIZIO 1. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/01/2018 con le seguenti caratteristiche:
- valore facciale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza tra 3 anni;
- cedole semestrali con tasso cedolare $r = 4\%$;
- prezzo di emissione $P_0 = 97$.

Considerando la tassazione, si determini una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza ytm all'emissione e si dica se questa è per difetto o per eccesso.

Successivamente, sapendo che il 01/01/2019, subito dopo lo stacco della cedola, il tasso di rendimento a scadenza era del 2.5%, si determini il prezzo tel quel in quella data, sempre considerando la tassazione.

Si calcoli la duration del titolo alla data del 01/01/2019 e con questa si ottenga infine un'approssimazione della variazione del prezzo corrispondente all'aumento del tasso di 1 punto percentuale.

✎



Poniamo $F = 100$, $n = 6$, $C = 100$, $r = 0.04$, $P_0 = 97$. Considerando la tassazione (aliquota $\gamma = 0.125$), la cedola netta risulta $\frac{r}{2}F(1-\gamma) = 4 \cdot 0.875 = 1.75$. C'è tassazione anche sul valore di rimborso, dato che l'acquisto è sotto la pari. Si ha

$$\text{CN} = 100 - (100 - 97) \cdot 0.125 = 99.625.$$

Determiniamo una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza ytm all'emissione.

$$ytm^0_{1/2} = \frac{\text{CED} + (\text{CN} - P_0)/n}{(\text{CN} + 2P_0)/3} = \frac{1.75 + (99.625 - 97)/6}{(99.625 + 2 \cdot 97)/3} = 0.022349936 \quad \text{(semestrale)},$$

che corrisponde ad un tasso annuo $ytm^0 = 0.045199391$.

Dobbiamo ora dire se questa stima è per difetto o per eccesso. L'equazione che definisce il vero tasso di rendimento a scadenza è

$$97 = 1.75 \cdot a_{\overline{6}|ytm_{1/2}} + 99.625(1 + ytm_{1/2})^{-6}.$$

Se calcoliamo il termine di destra con $ytm = ytm^0_{1/2}$ si ottiene il valore $96.97 < 97$. Ricordando che il temine di destra è decrescente al crescere del tasso, significa che la stima è per eccesso.

Passiamo alla domanda successiva. Sapendo che il 01/01/2019, subito dopo lo stacco della cedola, il tasso di rendimento a scadenza era del 2.5%, determiniamo il prezzo tel quel in quella data, ancora considerando la tassazione.

L'equazione è

$$P_{\text{tq}} = 1.75 \cdot a_{\overline{4}|0.025_{1/2}} + \text{CN}(1 + 0.025_{1/2})^{-4}.$$

Ovviamente qui non conosciamo ancora CN. Facciamo allora la prima ipotesi. Se $\text{CN} = 100$ risulta

$$P_{\text{tq}} = 1.75 \cdot a_{\overline{4}|0.025_{1/2}} + 100(1 + 0.025_{1/2})^{-4} = 101.97 > 100.$$

Il risultato è accettabile, dato che il valore di rimborso 100, quindi non tassato, è coerente con un prezzo tel quel sopra la pari. Ovviamente il fatto che non ci sia il rateo da considerare (la valutazione è subito dopo lo stacco di una cedola) semplifica le cose.

Ora l'ultima domanda. Il calcolo della duration del titolo alla data del 01/01/2019 e con questa un'approssimazione della variazione del prezzo corrispondente all'aumento del tasso di 1 punto percentuale. Si ha (poniamo $0.025_{1/2} = i$)

$$D_{1/2} = \frac{1 \cdot 1.75(1+i)^{-1} + 2 \cdot 1.75(1+i)^{-2} + 3 \cdot 1.75(1+i)^{-3} + 101.75(1+i)^{-4}}{P_{\text{tq}}} = 3.8991 \quad \text{(semestri)}.$$

Quindi
$$D = \frac{D_{1/2}}{2} = 1.9495 \text{ (anni) e } D_{\text{mod}} = \frac{D}{1+ytm} = 1.902.$$

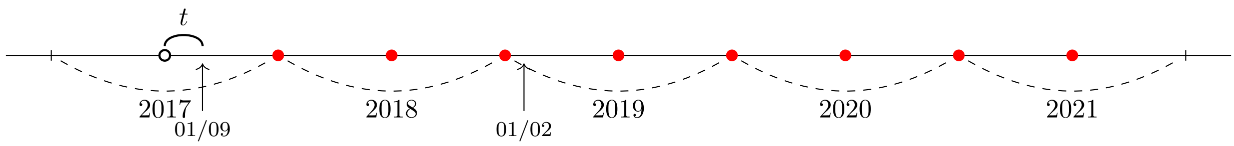
Pertanto una stima della variazione del prezzo corrispondente all'aumento del tasso di 1 punto percentuale è
$$\Delta P \approx -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P = -1.902 \cdot 0.01 \cdot 101.97 = -1.9395.$$

ESERCIZIO 2. Il B.T.P. denominato `Btp-1lg21 3%`, con scadenza il 01/07/2021, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 3\%$. Il 01/02/2019 era quotato (corso secco) a 105. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 01/09/2017 quando era quotato al corso secco 102 e di aver reinvestito le cedole al tasso dell'1% fino alla scadenza. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Qui si consideri la tassazione.)

✎

Il titolo paga le cedole al 01/01 e al 01/07. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dall'anno 2017, in cui viene acquistato.



Relativamente alla data di valutazione del 01/02/2019 le cedole da considerare sono 5. La cedola (non tassata) è 1.5. Calcoliamo il rateo:
$$\text{rateo} = 1.5 \cdot \frac{30}{180} = 0.25.$$

Il prezzo tel quel è quindi
$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 105 + 0.25 = 105.25.$$

L'equazione del valore che definisce il tasso di rendimento a scadenza è
$$P_{\text{tq}} = 1.5 \cdot a_{\overline{5}|ytm_{1/2}}(1+ytm_{1/2})^{1/6} + 100(1+ytm_{1/2})^{-5+1/6}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore dell'1%. Calcolando il termine di destra al tasso dell'1% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente) si trova il valore $105.019 < P_{\text{tq}}$. Possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza è minore dell'1%.

Passiamo ora alla seconda domanda. Dopo aver acquistato il titolo in data 01/09/2017 al corso secco 102, abbiamo reinvestito le cedole al tasso dell'1% fino alla scadenza. Dobbiamo determinare il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P., considerando ora la tassazione.

La cedola netta è
$$\text{Ced} = 1.5(1-0.125) = 1.3125.$$

Il rateo è
$$\text{rateo} = 1.3125 \cdot \frac{60}{180} = 0.4375.$$

Il prezzo tel quel è quindi
$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 102 + 0.4375 = 102.4375.$$

Non c'è tassazione sul capitale dato che il titolo è acquistato sopra la pari.

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/07/2021, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da
$$M_0 = P_{\text{tq}}(1+i_{\text{eff}})^{-2/12+4}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Indichiamo con M il montante delle cedole reinvestite e del capitale finale. Si ha

$$M = 1.3125 \cdot a_{\overline{8}|0.01_{1/2}} \left(1 + 0.01\right)^4 + 100 = 110.68513272.$$

L'equazione è pertanto $M_0 = M$, cioè

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-2/12+4} = M,$$

da cui si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(4-2/12)} - 1 = 0.020406289.$$

ESERCIZIO 3. Si considerino i seguenti due progetti di investimento:

$A.$

-8	3	X	-2	8
0	1	2	3	4

$B.$

-10	7	1	X	3
0	1	2	3	4

Ipotizzando un tasso esterno annuo del 10%, si determini il valore X per cui i due progetti sono equivalenti in base al criterio del REA/VAN. Si dica anche se per tale valore X i due progetti sono convenienti rispetto all'investimento di denaro.

Si dica poi se per entrambi i progetti i flussi consentono di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento. Si dica infine se il valore del TIR per il progetto B è maggiore del 5%.

✎

Al tasso di valutazione del 10% si ha

$$\mathrm{REA}_A(0.1) = -8 + \frac{3}{1.1} + \frac{X}{1.1^2} - \frac{2}{1.1^3} + \frac{8}{1.1^4}$$

e

$$\mathrm{REA}_B(0.1) = -10 + \frac{7}{1.1} + \frac{1}{1.1^2} + \frac{X}{1.1^3} + \frac{3}{1.1^4}.$$

L'equazione che uguaglia i due REA è pertanto

$$-8 + \frac{3}{1.1} + \frac{X}{1.1^2} - \frac{2}{1.1^3} + \frac{8}{1.1^4} = -10 + \frac{7}{1.1} + \frac{1}{1.1^2} + \frac{X}{1.1^3} + \frac{3}{1.1^4}$$

cioè

$$X\left(\frac{1}{1.1^2} - \frac{1}{1.1^3}\right) = -2 + \frac{4}{1.1} + \frac{1}{1.1^2} + \frac{2}{1.1^3} - \frac{5}{1.1^4},$$

che porta a

$$X = 7.32\overline{54}.$$

Il REA è positivo per entrambi (vale 4.7428) e quindi entrambi sono convenienti rispetto all'investimento di denaro.

L'unicità del TIR è garantita dal comportamento del segno dei flussi cumulati. Questi sono

$$\text{per il progetto } A\text{:} \quad -8\ ,\ -5\ ,\ 2.32\ ,\ 0.32\ ,\ 8.32$$

e

$$\text{per il progetto } B\text{:} \quad -10\ ,\ -3\ ,\ -2\ ,\ 5.32\ ,\ 8.32.$$

Per entrambi c'è un solo cambiamento di segno e questa è una condizione che assicura l'unicità del TIR.

Per concludere, è richiesta una stima del TIR di B, se è maggiore del 5%. Il REA di B, al variare del tasso, è espresso dalla funzione

$$\mathrm{REA}_B(i) = -10 + \frac{7}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{X}{i^3} + \frac{3}{i^4}.$$

Si tratta certamente di una funzione decrescente, in quanto la sua derivata è negativa. Sfruttando questa proprietà, possiamo servirci della solita tecnica di verifica del valore in un punto. Si ha

$$\mathrm{REA}_B(0.05) = 6.36, \text{ che è positivo.}$$

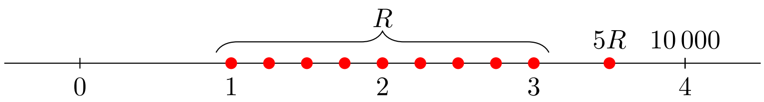
Pertanto il tasso interno di rendimento è maggiore del 5%.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 05/02/2019

ESERCIZIO 1. Voglio costituire un capitale di 10 000€ alla fine del 4° anno mediante rate trimestrali costanti R, la prima tra un anno e l'ultima alla fine del terzo e un ulteriore versamento di importo $5R$ dopo 3 anni e mezzo. Si determini R nell'ipotesi che il tasso di interesse annuo applicato sia del 10%.

✎

Ecco uno schema del piano di accumulo.



Vista la cadenza delle prime rate conviene calcolare il tasso equivalente trimestrale:

$$i_{1/4} = 1.1^{1/4} - 1 = 0.024113689.$$

Uguagliando il valore capitalizzato dei versamenti al valore del capitale da costituire si ha l'equazione del valore

$$\left[R \cdot \mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{-3} + 5R(1+i)^{-3.5}\right] \cdot (1+i)^4 = 10\,000,$$

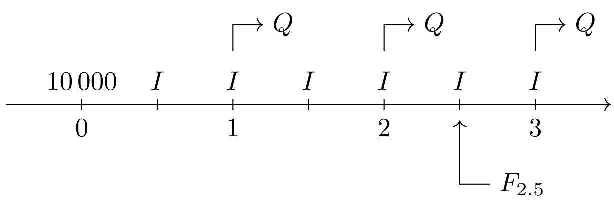
che fornisce la soluzione

$$R = \frac{10\,000}{\left[\mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{-3} + 5(1+i)^{-3.5}\right] \cdot (1+i)^4} = 619.02€.$$

ESERCIZIO 2. Per la restituzione di un prestito di 10 000€ si usa un piano di ammortamento americano a due tassi di 3 anni, con quote interessi semestrali posticipate e quote di accumulazione annue ugualmente posticipate. Per gli interessi il tasso a debito è del 5% annuo. Per la restituzione del capitale le quote di accumulazione sono valutate al tasso del 2% annuo. Si determini l'ammontare della quota interessi semestrale I e della quota di accumulazione annua Q. Si calcoli il fondo di accumulazione dopo 2 anni e mezzo. Si scriva infine l'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo dell'ammortamento.

Si scriva poi il piano di ammortamento dello stesso debito mediante 2 rate costanti (da determinare) $R_2 = R_3 = R$ (pagate alla fine del 2° e del 3° anno, comprensive di quote capitale e interessi), considerando che inoltre, alla fine del 1° anno, viene pagata una sola quota interessi. Si assuma un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

✎



Indicando con $S = 10\,000€$ l'ammontare del prestito e con $i = 0.05$ il tasso di remunerazione, la quota interessi I è costante ed è uguale agli interessi semestrali sull'intero debito. Quindi si ha

$$I = i_{1/2}S = (1.05^{1/2} - 1) \cdot 10\,000 = 246.95€.$$

Indicando con Q la quota di accumulazione, anch'essa costante ma annua, e con $i^\star = 0.02$ il tasso di accumulazione, Q si determina in modo che il montante delle 3 quote sia uguale al capitale mutuato. Quindi essa deve soddisfare l'equazione

$$Q\mathrm{a}_{\overline{3}|i^\star}(1+i^\star)^3 = S,$$

da cui

$$Q = \frac{S}{a_{\overline{3}|i^\star}(1+i^\star)^3} = \frac{10\,000}{a_{\overline{3}|0.02}(1+0.02)^3} = 3\,267.55€.$$

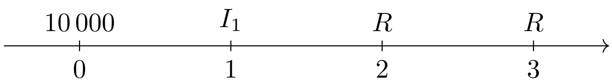
Il fondo di accumulazione F_t dopo 2 anni e mezzo è il valore delle quote di accumulazione già versate dopo 2 anni e mezzo, cioè all'epoca $t = 2.5$. Dato che all'epoca t sono state versate 2 quote di accumulazione, si ha

$$F_t = Q a_{\overline{2}|i^\star}(1+i^\star)^t = 3\,267.55 \cdot a_{\overline{2}|0.02}(1+0.02)^{2.5} = 6\,666.12€.$$

L'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo i_{eff} dell'ammortamento è

$$I \cdot a_{\overline{6}|(i_{\text{eff}})_{1/2}} + Q \cdot a_{\overline{3}|i_{\text{eff}}} = S \quad \text{cioè} \quad 246.95 \cdot a_{\overline{6}|(i_{\text{eff}})_{1/2}} + 3\,267.55 \cdot a_{\overline{3}|i_{\text{eff}}} = 10\,000.$$

Per la seconda modalità uno schema può essere il seguente.



La quota interessi pagata alla fine del primo anno è $I_1 = 0.1 \cdot 10\,000 = 1\,000$. Essa permette di mantenere inalterato il debito residuo, che quindi alla fine del primo anno è ancora 10 000. Successivamente, le due rate devono soddisfare l'equazione

$$R \cdot a_{\overline{2}|0.1} = 10\,000,$$

da cui si ricava il valore della rata

$$R = \frac{10\,000}{a_{\overline{2}|0.1}} = 5\,761.90.$$

Pertanto il piano di ammortamento può essere riassunto nello schema seguente:

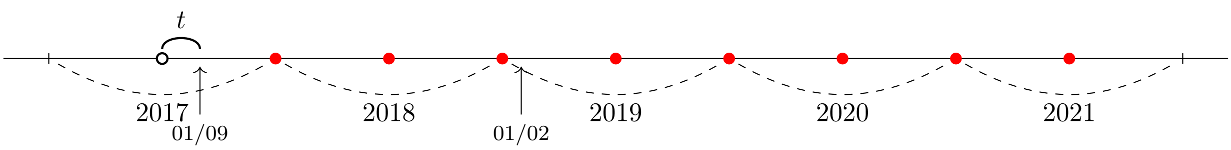
k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	10 000
1	1 000	0	1 000	10 000
2	5 761.90	4 761.90	1 000	5 238.10
3	5 761.90	5 238.09	523.81	0

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. denominato `Btp-1lg21 3%`, con scadenza il 01/07/2021, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 3\%$. Il 01/02/2019 era quotato (corso secco) a 105. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 01/09/2017 quando era quotato al corso secco 102 e di aver reinvestito le cedole al tasso dell'1% fino alla scadenza. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Qui si consideri la tassazione.)

✎

Il titolo paga le cedole al 01/01 e al 01/07. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dall'anno 2017, in cui viene acquistato.



Relativamente alla data di valutazione del 01/02/2019 le cedole da considerare sono 5. La cedola (non tassata) è 1.5. Calcoliamo il rateo:

$$\text{rateo} = 1.5 \cdot \frac{30}{180} = 0.25.$$

Il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 105 + 0.25 = 105.25.$$

L'equazione del valore che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 1.5 \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|ytm_{1/2}}(1+ytm_{1/2})^{1/6} + 100(1+ytm_{1/2})^{-5+1/6}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore dell'1%. Calcolando il termine di destra al tasso dell'1% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente) si trova il valore $105.019 < P_{\text{tq}}$. Possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza è minore dell'1%.

Passiamo ora alla seconda domanda. Dopo aver acquistato il titolo in data 01/09/2017 al corso secco 102, abbiamo reinvestito le cedole al tasso dell'1% fino alla scadenza. Dobbiamo determinare il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P., considerando ora la tassazione.

La cedola netta è

$$\textsc{Ced} = 1.5(1-0.125) = 1.3125.$$

Il rateo è

$$\text{rateo} = 1.3125 \cdot \frac{60}{180} = 0.4375.$$

Il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 102 + 0.4375 = 102.4375.$$

Non c'è tassazione sul capitale dato che il titolo è acquistato sopra la pari.

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/07/2021, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$M_0 = P_{\text{tq}}(1+i_{\text{eff}})^{-2/12+4}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Indichiamo con M il montante delle cedole reinvestite e del capitale finale. Si ha

$$M = 1.3125 \cdot \mathrm{a}_{\overline{8}|0.01_{1/2}}\,(1+0.01)^4 + 100 = 110.68513272.$$

L'equazione è pertanto $M_0 = M$, cioè

$$P_{\text{tq}}(1+i_{\text{eff}})^{-2/12+4} = M,$$

da cui si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(4-2/12)} - 1 = 0.020406289.$$

ESERCIZIO 4. Si considerino i seguenti due progetti di investimento:

A.	-8	3	X	-2	8
	0	1	2	3	4

B.	-10	7	1	X	3
	0	1	2	3	4

Ipotizzando un tasso esterno annuo del 10%, si determini il valore X per cui i due progetti sono equivalenti in base al criterio del REA/VAN. Si dica anche se per tale valore X i due progetti sono convenienti rispetto all'investimento di denaro.

Si dica poi se per entrambi i progetti i flussi consentono di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento. Si dica infine se il valore del TIR per il progetto B è maggiore del 5%.

✎

Al tasso di valutazione del 10% si ha

$$\text{REA}_A(0.1) = -8 + \frac{3}{1.1} + \frac{X}{1.1^2} - \frac{2}{1.1^3} + \frac{8}{1.1^4}$$

e

$$\text{REA}_B(0.1) = -10 + \frac{7}{1.1} + \frac{1}{1.1^2} + \frac{X}{1.1^3} + \frac{3}{1.1^4}.$$

L'equazione che uguaglia i due REA è pertanto

$$-8+\frac{3}{1.1}+\frac{X}{1.1^2}-\frac{2}{1.1^3}+\frac{8}{1.1^4}=-10+\frac{7}{1.1}+\frac{1}{1.1^2}+\frac{X}{1.1^3}+\frac{3}{1.1^4}$$

cioè

$$X\left(\frac{1}{1.1^2}-\frac{1}{1.1^3}\right)=-2+\frac{4}{1.1}+\frac{1}{1.1^2}+\frac{2}{1.1^3}-\frac{5}{1.1^4},$$

che porta a

$$X=7.32\overline{54}.$$

Il REA è positivo per entrambi (vale 4.7428) e quindi entrambi sono convenienti rispetto all'investimento di denaro.
L'unicità del TIR è garantita dal comportamento del segno dei flussi cumulati. Questi sono

$$\text{per il progetto } A\text{:}\quad -8\ ,\ -5\ ,\ 2.32\ ,\ 0.32\ ,\ 8.32$$

e

$$\text{per il progetto } B\text{:}\quad -10\ ,\ -3\ ,\ -2\ ,\ 5.32\ ,\ 8.32.$$

Per entrambi c'è un solo cambiamento di segno e questa è una condizione che assicura l'unicità del TIR.
Per concludere, è richiesta una stima del TIR di B, se è maggiore del 5%. Il REA di B, al variare del tasso, è espresso dalla funzione

$$\text{REA}_B(i)=-10+\frac{7}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{X}{i^3}+\frac{3}{i^4}.$$

Si tratta certamente di una funzione decrescente, in quanto la sua derivata è negativa. Sfruttando questa proprietà, possiamo servirci della solita tecnica di verifica del valore in un punto. Si ha

$$\text{REA}_B(0.05)=6.36,\ \text{che è positivo.}$$

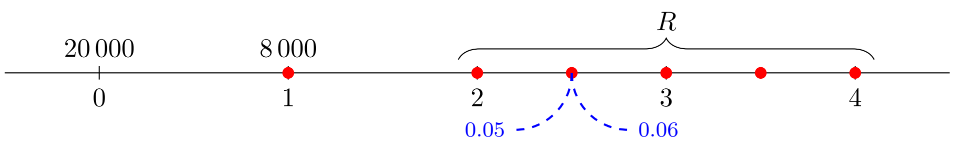
Pertanto il tasso interno di rendimento è maggiore del 5%.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 10/06/2019

ESERCIZIO 1. Posso restituire un prestito di 20 000€ in 4 anni mediante un versamento di 8 000€ tra un anno e 5 rate semestrali costanti, la prima delle quali tra due anni. Nell'ipotesi che il tasso di interesse annuo sia $i^{(1)} = 5\%$ per due anni e mezzo e $i^{(2)} = 6\%$ in seguito, si determini l'ammontare della rata semestrale.

Con gli stessi tassi si ipotizzi poi di poter restituire il prestito mediante rate semestrali costanti di 2 000€, la prima delle quali subito. Con quante rate intere e quale residuo, valutato contestualmente all'ultima rata, posso restituire il prestito?

✎



Vista la cadenza delle rate conviene calcolare i due tassi equivalenti semestrali:

$$i^{(1)}_{1/2} = 1.05^{1/2} - 1 = 0.024695077$$

e

$$i^{(2)}_{1/2} = 1.06^{1/2} - 1 = 0.029563014.$$

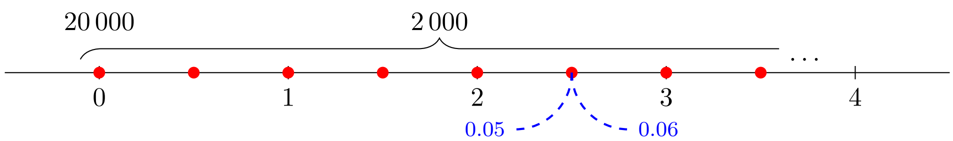
Indicando con R, come in figura, il valore della rata, l'equazione del valore è

$$20\,000 = 8\,000 \cdot (1+0.05)^{-1} + R \cdot a_{\overline{2}|0.05_{1/2}} \left(1+0.05_{1/2}\right)^{-3} + R \cdot a_{\overline{3}|0.06_{1/2}} \left(1+0.05_{1/2}\right)^{-5},$$

da cui si ricava

$$R = \frac{20\,000 - 8\,000 \cdot (1+0.05)^{-1}}{a_{\overline{2}|0.05_{1/2}} \left(1+0.05_{1/2}\right)^{-3} + a_{\overline{3}|0.06_{1/2}} \left(1+0.05_{1/2}\right)^{-5}} = 2\,880.56€.$$

Passiamo alla seconda modalità di restituzione del prestito. Una figura che illustra la nuova situazione è



Anzitutto osserviamo che 6 rate da 2 000€ non sono sufficienti per restituire il prestito di 20 000€. Quindi, per poter restituire il prestito occorreranno certamente 6 rate, da valutare al tasso del 5% e ulteriori rate (n) da valutare con entrambi i tassi. La condizione è

$$2\,000 \cdot a_{\overline{6}|0.05_{1/2}}(1+0.05_{1/2}) + 2\,000 \cdot a_{\overline{n}|0.06_{1/2}}(1+0.05_{1/2})^{-5} \geq 20\,000.$$

Questa equivale a

$$a_{\overline{n}|0.06_{1/2}} \geq \frac{20\,000 - 2\,000 \cdot a_{\overline{6}|0.05_{1/2}}(1+0.05_{1/2})}{2\,000 \cdot (1+0.05_{1/2})^{-5}} = 4.914411982 \quad \Big(= A\Big).$$

La disequazione equivale a sua volta alle

$$\frac{1-(1+0.06_{1/2})^{-n}}{0.06_{1/2}} \geq A \quad \Leftrightarrow \quad 1-(1+0.06_{1/2})^{-n} \geq 0.06_{1/2}A \quad \Leftrightarrow \quad (1+0.06_{1/2})^{-n} \leq 1 - 0.06_{1/2}A$$

e ancora, applicando i logaritmi,

$$-n\ln(1+0.06_{1/2}) \leq \ln(1-0.06_{1/2}A) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1-0.06_{1/2}A)}{\ln(1+0.06_{1/2})} = 5.4.$$

Questo dice che per restituire il prestito servono, oltre alle prime 6, altre $n = 5$ rate intere più un residuo.

Ora il calcolo del residuo. Con $n = 5$ si ha

$$20\,000 - 2\,000 \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|0.05_{1/2}}(1+0.05_{1/2}) + 2\,000 \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|0.06_{1/2}}(1+0.05_{1/2})^{-5} = 582.42€.$$

Si tratta del residuo valutato in $t = 0$. Pertanto il residuo valutato nell'istante dell'ultima rata è

$$582.42(1+0.05_{1/2})^5(1+0.06_{1/2})^5 = 761.15€.$$

ESERCIZIO 2. Una società finanziaria, relativamente ad un bene con prezzo di listino $P = 15\,000€$, vuole proporre ad un cliente un contratto di leasing di durata triennale che prevede un anticipo del 10% del prezzo di listino, un riscatto pari al 5% del prezzo di listino e il versamento di 36 canoni mensili posticipati. La società può avere uno sconto del 10% sull'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto un tasso di interesse annuo del 12%. Si scriva l'equazione del valore per la società di leasing e si determini a quanto deve ammontare il canone da proporre al cliente. Sapendo che il cliente può avere uno sconto del 2% sull'acquisto del bene, si scriva l'equazione del valore per il cliente. Sapendo infine che il cliente per l'acquisto diretto del bene può avere un prestito dalla sua banca al tasso di interesse annuo del 6%, si dica se egli ragionevolmente sceglierà il prestito bancario o il contratto di leasing.

✎

La società finanziaria spende $15\,000 \cdot (1 - 0.1) = 13\,500€$ per l'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto di leasing un tasso di interesse i del 12%. L'anticipo è di $1\,500€$ e il riscatto di $750€$.

Serve il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 12%. Si ha

$$i_{1/12} = 1.12^{1/12} - 1 = 0.009488792.$$

Indicato con R il canone mensile, l'equazione del valore per la società di leasing è

$$13\,500 = 1\,500 + 750(1+i)^{-3} + R \cdot \mathrm{a}_{\overline{36}|i_{1/12}},$$

da cui si ricava

$$R = \frac{13\,500 - 1\,500 - 750(1+i)^{-3}}{\mathrm{a}_{\overline{36}|i_{1/12}}} = 377.49€.$$

Ora passiamo alla valutazione del cliente, al quale viene proposto un contratto di leasing con le caratteristiche ottenute poco fa (cioè un anticipo di $1\,500€$, un riscatto finale di $750€$ e un canone di 36 rate mensili di $377.49€$). Tenendo conto che il cliente può avere uno sconto del 2% sul prezzo d'acquisto del bene, egli è interessato a scoprire qual è il tasso implicito nell'equivalenza finanziaria tra lo spendere oggi $15\,000 \cdot (1 - 0.02) = 14\,700€$ e distribuire il pagamento nel tempo alle condizioni del contratto.

La sua equazione del valore è quindi

$$14\,700 = 1\,500 + 750(1+i)^{-3} + R\mathrm{a}_{\overline{36}|i_{1/12}},$$

dove questa volta il tasso è incognito. La soluzione esatta di questa equazione fornirebbe al cliente un valore preciso da confrontare con il tasso proposto dalla banca per un prestito di $14\,700€$. La risoluzione esatta (in realtà comunque approssimata) di questa equazione richiederebbe l'uso di approssimazioni successive, eventualmente con il metodo di Newton, e non è richiesta.

Per poter dire quale sarà la scelta ragionevole del cliente tra stipulare il contratto di leasing e chiedere un prestito alla banca al tasso $i^{(B)} = 6\%$ possiamo semplicemente calcolare il valore attuale degli importi relativi al contratto al tasso della banca. Dopo aver calcolato il tasso equivalente mensile $i^{(B)}_{1/12} = 0.004867551$, si trova

$$1\,500 + 750(1+i^{(B)})^{-3} + R\mathrm{a}_{\overline{36}|i^{(B)}_{1/12}} = 14\,567.62 < 14\,700.$$

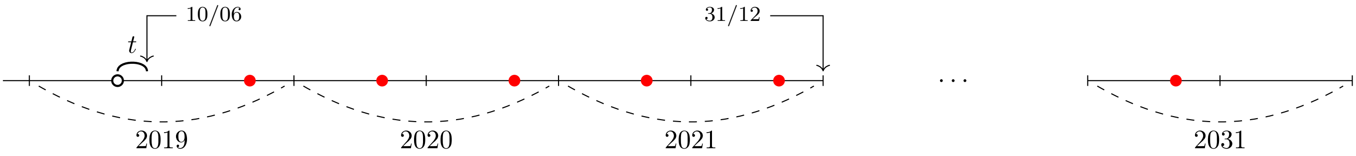
Il tasso della banca sconta maggiormente gli importi rispetto al tasso effettivo incognito e quindi il tasso della banca è maggiore rispetto ad $i^\star$. Il cliente ragionevolmente sceglierà il contratto di leasing.

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. `Btp-1mg31 6%`, con scadenza il 01/05/2031, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 6\%$. Verrà rimborsato alla pari. Oggi (10/06/2019) è quotato (corso secco) a 135.30. Si stabilisca se il suo tasso di rendimento a scadenza ytm è maggiore del 2% oppure no. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Ipotizzando di acquistare oggi il titolo, di reinvestire le cedole su un conto corrente dove il tasso di interesse a credito sarà dell'1%, e infine di rivendere il titolo il 31/12/2021 al prezzo $P_V = 125$, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P., considerando la tassazione.

✎

Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dall'anno 2019, in cui viene valutato.



Dobbiamo tenere conto della tassazione. La cedola netta è

$$\textsc{Ced} = \frac{6}{2}(1 - 0.125) = 2.625.$$

Il rateo è $2.625 \cdot \frac{40}{180} = 0.58\overline{3}$, dato che passano 40 giorni dal 01/05 al 10/06.

A scadenza saranno incassate $n = 24$ cedole. Il prezzo tel quel è

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 135.30 + 0.583 = 135.883.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$135.883 = 2.625 \cdot a_{\overline{24}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{40/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-24+40/180}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 2%. Calcolando il termine di destra al tasso del 2% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente $0.02_{1/2} = 0.009950493$) si trova il valore $134.943 < 135.883$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza è minore del 2%.

Passiamo ora alla seconda domanda.

L'ipotesi è di acquistare il titolo in data 10/06/2019 al prezzo tel quel $P_{\text{tq}} = 135.883$, di venderlo il 31/12/2021 al prezzo $P_V = 125$, reinvestendo le 5 cedole al tasso dell'1%. Abbiamo già considerato la tassazione sulle cedole. Non c'è tassazione sul capitale dato che il titolo viene venduto a 125 ed era stato acquistato a più di 130.

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole (M) e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 31/12/2021, data di vendita del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, l'equazione è

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{2+200/360} = M + P_V.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Calcoliamo allora il montante M delle cedole. Serve il tasso semestrale equivalente all'1%.

$$1.01_{1/2} = 0.004987562.$$

Si ha (attenzione ai tassi e alla corrispondente misura dei tempi)

$$M = 2.625 \cdot a_{\overline{5}|0.01_{1/2}} \left(1 + 0.01_{1/2}\right)^{5+60/180} = 13.278581.$$

Dall'equazione scritta sopra si ricava quindi

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M + P_V}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(2+200/360)} - 1 = 0.006861922.$$

ESERCIZIO 4. L'acquisto di un bene venduto al prezzo di listino di 8 000€ può avvenire o con pagamento immediato con lo sconto del 2% oppure con un finanziamento di 5 000€ da restituire in 12 rate mensili costanti (posticipate) di 425€. Le spese accessorie per il contratto di finanziamento ammontano a 30€. Si confrontino le due possibilità mediante il criterio del R.E.A. con un tasso esterno del 10%.

Si scriva l'equazione del T.A.N., si calcoli una prima approssimazione di questo e si dica se questa è per difetto o per eccesso. Si scriva poi l'equazione del T.A.E.G. e se ne trovi una prima approssimazione. Si dica se il 5% è una ragionevole stima per eccesso del tasso effettivo di costo i_{eff} su base annua dell'acquisto attraverso il finanziamento e, in caso contrario, si determini una stima più ragionevole.

✎

Indichiamo con A la prima modalità, cioè il pagamento immediato con lo sconto, e con B la seconda, cioè con il finanziamento. Il REA della modalità A è

$$\text{REA}_A(0.1) = -8\,000(1-0.02) = -7\,840.$$

La modalità B prevede, dato che il prezzo di listino è 8 000€, il pagamento immediato della parte non finanziata, cioè 3 000€, il pagamento immediato delle spese accessorie del contratto di finanziamento, cioè 30€, e le 12 rate mensili posticipate di 425€. Il REA della modalità B è pertanto (indico col simbolo $0.1_{1/12}$ il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 10%)

$$\text{REA}_B(0.1) = -3\,000 - 30 - 425 \cdot \text{a}_{\overline{12}|0.1_{1/12}} = -7\,875.21.$$

La modalità A è quindi preferibile alla modalità B.

Per il calcolo del T.A.N. sottostante il contratto di finanziamento, cioè il tasso di costo della possibilità di pagare attraverso il finanziamento rispetto al pagamento del prezzo di listino, l'equazione da considerare è

$$8\,000 = 3\,000 + 425 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

Per il calcolo di una prima approssimazione del T.A.N. possiamo usare la formula studiata, cioè

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R}, \quad \text{riferita all'equazione} \quad V_0 = R \cdot \text{a}_{\overline{n}|i}.$$

Per applicare questa formula dobbiamo scrivere la nostra equazione nella forma richiesta, e cioè

$$5\,000 = 425 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}. \tag{1}$$

Pertanto

$$\text{TAN}^0_{1/12} = \frac{2(12 - 5\,000/425)}{(12+1)3\,000/425} = 0.003076923,$$

che è un tasso mensile, al quale corrisponde il tasso annuo $\text{TAN}_0 = 0.037554381$.

Per dire se questa approssimazione è per difetto o per eccesso basta calcolare il termine di destra della (1). Si ottiene $4\,999.45 < 5\,000$. Quindi l'approssimazione è per eccesso.

L'equazione del T.A.E.G. è

$$8\,000 = 3\,000 + 30 + 425 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}},$$

la quale, scritta nella forma

$$4\,970 = 425 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}},$$

permette, come prima, di trovare l'approssimazione

$$\text{TAEG}^0_{1/12} = \frac{2(12 - 4\,970/425)}{(12+1)4\,970/425} = 0.004024145,$$

tasso mensile al quale corrisponde il tasso annuo $\text{TAEG}_0 = 0.049372994$.

Ora il tasso effettivo. L'equazione è

$$7\,840 = 3\,000 + 30 + 425 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

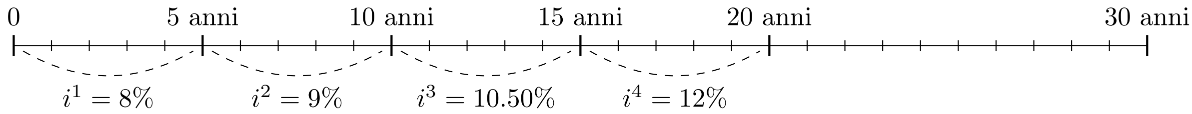
Dobbiamo dire se il 5% è una ragionevole stima per eccesso del tasso effettivo di costo i_{eff}. Calcolando il termine di destra al tasso del 5% si trova il valore $7\,997.47 > 7\,840$. Quindi il 5% è una stima per difetto, e anche piuttosto lontana dal valore esatto. Una stima più ragionevole può essere ancora una volta il valore che si ottiene con la solita formula, cioè

$$(i_{\text{eff}})^0_{1/12} = \frac{2(12 - 4\,810/425)}{(12+1)4\,810/425} = 0.009275547,$$

tasso mensile al quale corrisponde il tasso annuo $(i_{\text{eff}})_0 = 0.11716422$, quindi oltre l'11%.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 05/09/2019

ESERCIZIO 1. Un Buono Fruttifero Postale trentennale di £250 000, emesso in lire il 01/01/1989 prevedeva interessi calcolati con un regime "misto", semplice all'interno dell'anno e composto alla fine di ogni anno (cioè con capitalizzazione a fine anno degli interessi maturati durante l'anno). La struttura dei tassi era la seguente: 8% annuo per i primi 5 anni, 9% annuo per gli anni dal 6° al 10°, 10.50% annuo per gli anni dall'11° al 15°, 12% annuo per gli anni dal 16° al 20°, più £32 818 per ogni successivo bimestre maturato fino al 30° anno. Si calcoli il valore di rimborso lordo (in euro) del titolo alla scadenza.[1] Si calcoli poi il valore di rimborso lordo (in euro) del titolo alla data del 30/04/2002 (anno commerciale). Si identifichi infine il tasso e il regime applicato dal 20° al 30° anno.



La modalità di calcolo degli interessi del Buono Fruttifero Postale (BFP) è data da un regime "misto", che significa semplice all'interno dell'anno e composto sugli anni interi. C'è quindi capitalizzazione degli interessi alla fine di ogni anno mentre, in un momento intermedio dell'anno il calcolo avviene nel regime semplice, sulla base di quanto maturato fino all'inizio dell'anno in corso. Il tasso non è costante ma varia con questa modalità:

$$\begin{aligned} i^1 &= 8\% \text{ (annuo) dal } 1° \text{ al } 5° \text{ anno,} \\ i^2 &= 9\% \text{ dal } 6° \text{ al } 10° \text{ anno,} \\ i^3 &= 10.50\% \text{ dal } 11° \text{ al } 15° \text{ anno,} \\ i^4 &= 12\% \text{ dal } 16° \text{ al } 20° \text{ anno.} \end{aligned}$$

Infine, dal 21° al 30° anno, gli interessi sono costanti, dati da £32 818 ogni bimestre. Il fatto che negli ultimi 10 anni gli interessi siano costanti, calcolati sul valore iniziale del decennio, dice già che qui il regime è semplice (e questo risponde già all'ultima domanda).

Se indichiamo con $C_0 = 250\,000£$ il valore investito nel BFP, dopo 20 anni il valore del titolo è dato da

$$C_{20} = C_0(1+i_1)^5(1+i_2)^5(1+i_3)^5(1+i_4)^5 = 250\,000(1+0.08)^5(1+0.09)^5(1+0.105)^5(1+0.12)^5 = 1\,640\,940£.$$

Per avere il valore di rimborso alla scadenza del titolo basta ora sommare gli interessi negli ultimi 10 anni (60 bimestri). Quindi

$$C_{30} = 1\,640\,940 + 32\,818 \cdot 60 = 3\,610\,020£.$$

La conversione in euro è data da

$$C_{30} = \frac{3\,610\,020}{1\,936.27} = 1\,864.42€.$$

Ora il valore di rimborso lordo (in euro) alla data del 30/04/2002. A questa data sono passati 13 anni e 4 mesi. Entra in azione il meccanismo del regime misto: gli interessi vanno calcolati per 13 anni col regime composto e per i 4 mesi col regime semplice. Pertanto

$$C_{30/04/2002} = 250\,000(1+0.08)^5(1+0.09)^5(1+0.105)^3\left(1+0.105\cdot\frac{4}{12}\right) = 789\,257£,$$

che corrispondono a 407.62€.

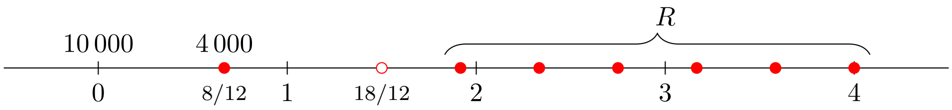
Il regime negli ultimi 10 anni è, come già detto, un regime semplice, dato che gli interessi sono calcolati sempre sul valore iniziale. Tale valore iniziale è $C_{20} = 1\,640\,940£$. Per ottenere il tasso basta osservare che nel bimestre gli interessi sono 32 818£, e quindi il tasso (bimestrale) è

$$i^5_{1/6} = \frac{32\,818}{1\,640\,940} = 0.019999512, \text{ cioè sostanzialmente il 2\%.}$$

[1]Si ricordi che per la conversione £/€ si ha che 1€ = 1 936.27£.

Pertanto il tasso annuo negli ultimi 10 anni è il 12%, cioè quello che era nel quinquennio precedente.

ESERCIZIO 2. Posso restituire un prestito di 10 000€ mediante un versamento di 4 000€ tra 8 mesi e successive 6 rate costanti, una ogni 5 mesi, in modo che l'ultima sia tra 4 anni. Nell'ipotesi che il tasso di interesse annuo sia $i = 5\%$, si determini l'ammontare della rata.



Le 6 rate cadono alla fine dei mesi: 23°, 28°, 33°, 38°, 43° e 48°.

Dato che le rate hanno un periodo di 5 mesi, serve il tasso su base 5 mesi, che è

$$i_{5/12} = (1 + 0.05)^{5/12} - 1 = 0.020537281.$$

Indicando con R, come in figura, il valore della rata, l'equazione del valore è

$$10\,000 = 4\,000 \cdot (1 + 0.05)^{-8/12} + R \cdot a_{\overline{6}|i_{5/12}} (1 + i)^{-18/12},$$

da cui si ricava

$$R = \frac{10\,000 - 4\,000 \cdot (1 + 0.05)^{-8/12}}{a_{\overline{6}|i_{5/12}} (1 + i)^{-18/12}} = 1\,179.21€.$$

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. `Btp-1mg31 6%`, con scadenza il 01/05/2031, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 6\%$. Oggi (05/09/2019) è quotato (corso secco) a 153. Ipotizzando di acquistare oggi il titolo, di reinvestire le cedole su un conto corrente dove il tasso di interesse a credito sarà dell'1% e infine di rivendere il titolo il 31/12/2025 al prezzo $P_V = 130$, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si stabilisca poi se il suo tasso di rendimento a scadenza *ytm* in data odierna è compreso tra lo 0.5% e l'1% oppure no.

Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. Vengono presentati due problemi relativi a due situazioni diverse: la prima chiede di determinare un tasso effettivo a seguito della vendita anticipata del titolo (quindi si incassano solo una parte delle rate che il titolo prevede fino alla scadenza); la seconda invece parla di tasso di rendimento a scadenza e quindi qui occorrerà considerare tutte le rate fino alla scadenza.

L'ipotesi è di acquistare il titolo in data 05/09/2019 al corso secco $P_s = 153$. Dobbiamo tenere conto della tassazione. La cedola netta è

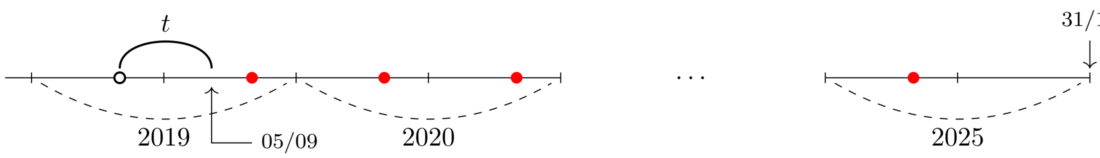
$$\text{CED} = \frac{6}{2}(1 - 0.125) = 2.625.$$

Dallo stacco dell'ultima cedola alla data di valutazione (05/09/2019) sono passati 125 giorni.

Il rateo è $2.625 \cdot \frac{125}{180} = 1.8229$. Il prezzo tel quel è quindi

$$P_{tq} = P_s + \text{rateo} = 153 + 1.8229 = 154.8229.$$

Consideriamo il primo problema. Una rappresentazione opportuna potrebbe essere quella qui sotto (limitata ad una parte della vita residua del titolo).



L'ipotesi è di rivendere il titolo il 31/12/2025 al prezzo $P_V = 130$, dopo aver reinvestito le cedole incassate al tasso dell'1%. Ci sono 13 cedole da conteggiare.

Abbiamo già considerato la tassazione sulle cedole. Non c'è tassazione sul capitale dato che il titolo viene venduto a 130 ed era stato acquistato a più di 150.

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole (M) e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 31/12/2025, data di vendita del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, l'equazione è

$$P_{\text{tq}}(1+i_{\text{eff}})^{-125/360+13/2+2/12} = M + P_V. \tag{2}$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Calcoliamo allora il montante M delle cedole. Serve il tasso semestrale equivalente all'1%.

$$1.01_{1/2} = 0.004987562.$$

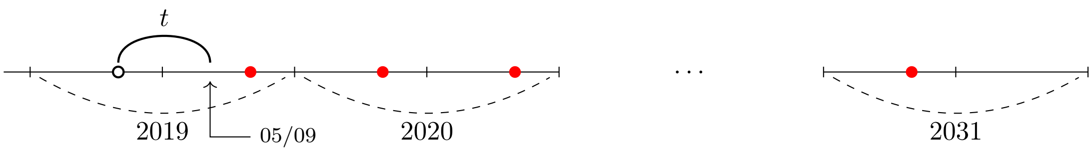
Si ha (attenzione ai tassi e alla corrispondente misura dei tempi)

$$M = 2.625 \cdot \mathrm{a}_{\overline{13}|0.01_{1/2}} \left(1+0.01_{1/2}\right)^{13+2/6} = 35.223.$$

Dall'equazione (2) scritta sopra si ricava quindi

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M+P_V}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(-125/360+13/2+2/12)} - 1 = 0.01034.$$

Passiamo al secondo problema. Una rappresentazione ora è questa.



Qui dobbiamo considerare tutte le cedole che restano fino a scadenza, e sono 24.

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$154.8229 = 2.625 \cdot \mathrm{a}_{\overline{24}|ytm_{1/2}}(1+ytm_{1/2})^{125/180} + 100(1+ytm_{1/2})^{-24+125/180}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza è compreso tra lo 0.5% e l'1% oppure no.

Calcolando il termine di destra al tasso dello 0.5% (tasso semestrale equivalente $0.005_{1/2} = 0.002496882$) si trova il valore $155.94 > P_{\text{tq}}$. Calcolando invece il termine di destra al tasso dell'1% (tasso semestrale equivalente $0.01_{1/2} = 0.004987562$) si trova il valore $148.49 < P_{\text{tq}}$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che la doppia limitazione proposta è vera.

ESERCIZIO 4. Si considerino i seguenti due progetti di investimento:

$A.$

importi	−10	4	2	−1	9
tempi	0	1	2	3	4

$B.$

importi	−12	7	2	2	5
tempi	0	1	2	3	4

Ipotizzando un tasso esterno annuo del 10%, si determini quale dei due progetti risulta conveniente in base al criterio del REA/VAN. Si dica anche se i due progetti sono oppure no convenienti rispetto all'investimento di denaro.

Si dica poi se per il progetto A il flusso degli importi consente di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento (TIR). Si dica infine se il 10% è il TIR del progetto A e, in caso contrario, si determini un intervallo in cui il TIR sia compreso.

Il tasso di valutazione è il del 10%. Il REA del progetto A è

$$\text{REA}_A(0.1) = -10 + \frac{4}{1+0.1} + \frac{2}{(1+0.1)^2} - \frac{1}{(1+0.1)^3} + \frac{9}{(1+0.1)^4} = 0.68.$$

Il REA del progetto B è

$$\text{REA}_B(0.1) = -12 + \frac{7}{1+0.1} + \frac{2}{(1+0.1)^2} + \frac{2}{(1+0.1)^3} + \frac{5}{(1+0.1)^4} = 0.93.$$

In base al criterio del REA/VAN risulta quindi più conveniente il progetto B. Entrambi i progetti sono convenienti rispetto al puro investimento di denaro, dato che i REA sono positivi per entrambi.

Consideriamo ora il flusso degli importi *cumulati* del progetto A: questi sono

$$-10\ ,\ -6\ ,\ -4\ ,\ -5\ ,\ 4$$

L'unicità del TIR è garantita dal fatto che c'è un solo cambiamento di segno.

Il 10% non è il TIR del progetto A, dato che il REA di A non si annulla se calcolato al tasso del 10% (come visto prima). Il segno del $\text{REA}_A(0.1)$ dice che il TIR è maggiore del 10%. Determiniamo un estremo superiore di un intervallo in cui il TIR sia compreso procedendo per tentativi.

$$\begin{aligned}
\text{REA}_A(0.11) &= -10 + \frac{4}{1+0.11} + \frac{2}{(1+0.11)^2} - \frac{1}{(1+0.11)^3} + \frac{9}{(1+0.11)^4} = 0.42 \\
\text{REA}_A(0.12) &= -10 + \frac{4}{1+0.12} + \frac{2}{(1+0.12)^2} - \frac{1}{(1+0.12)^3} + \frac{9}{(1+0.12)^4} = 0.17 \\
\text{REA}_A(0.13) &= -10 + \frac{4}{1+0.13} + \frac{2}{(1+0.13)^2} - \frac{1}{(1+0.13)^3} + \frac{9}{(1+0.13)^4} = -0.06.
\end{aligned}$$

Pertanto possiamo affermare che il tasso interno di rendimento sta nell'intervallo $[0.12, 0.13]$, cioè è compreso tra il 12% e il 13%.