Svolgimento dei temi d'esame di MDEF
Anno Accademico 2019/20

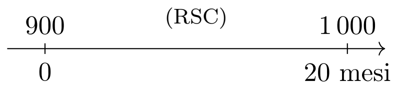
Alberto Peretti

Settembre 2020

PROVA INTERMEDIA di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 07/11/2019

ESERCIZIO 1. Si supponga che nel RSC siano ritenuti equivalenti 900€ in $t = 0$ e 1 000€ in $t = 20$ mesi. Si determinino i montanti tra 20 mesi, nel RIS e nel RIC, dei 900€.

Il semplice schema che esprime l'equivalenza dei due importi nel tempo (nel RSC) è il seguente:



L'equivalenza tra i due importi nel RSC porta all'equazione del valore

$$900 = 1\,000\left(1 - d \cdot \frac{20}{12}\right), \text{ da cui si ricava } d = \frac{12}{20}\left(1 - \frac{900}{1\,000}\right) = 0.06.$$

Questo è il tasso di sconto su base annua. L'equivalente tasso di interesse annuo è

$$i = \frac{d}{1-d} = 0.063829787.$$

Ora, nel RIS, indicando con M il montante, possiamo scrivere l'equazione del valore

$$M = 900\left(1 + i \cdot \frac{20}{12}\right) = 995.74€.$$

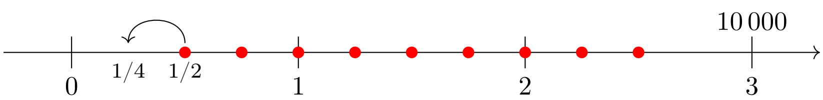
Analogamente, ma con una legge di tipo esponenziale, nel RIC, possiamo scrivere l'equazione del valore

$$M = 900(1+i)^{20/12} = 997.77€.$$

ESERCIZIO 2. Per costituire un capitale di 10 000€ alla fine del 3° anno verso nei 3 anni rate trimestrali costanti, la prima delle quali tra 6 mesi e l'ultima 6 mesi prima della scadenza. Si determini a quanto deve ammontare la rata, ipotizzando un tasso di interesse annuo del 10%.

Supponendo invece che la rata trimestrale sia di 1 200€, la prima tra 6 mesi, si determini il numero di rate intere necessarie e il residuo (contestuale all'ultima rata) per costituire lo stesso capitale alla stessa scadenza.

Può essere utile rappresentare lo schema dei versamenti.



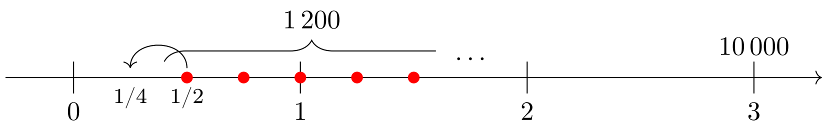
Le rate trimestrali sono 9. Indicando con R la rata, l'equazione del valore è quindi

$$R \cdot a_{\overline{9}|i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{-1}(1+i)^3 = 10\,000, \quad \text{con } i = 0.1.$$

Dato che $i_{1/4} = (1+0.1)^{1/4} - 1 = 0.024113689$, si trova

$$R = \frac{10\,000}{a_{\overline{9}|i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{-1}(1+i)^3} = 961.27€.$$

Passiamo alla seconda modalità di costituzione del capitale di 10 000€ tra 3 anni. Dobbiamo ora trovare il numero di rate. Lo schema può essere questo:



L'equazione del valore è ora

$$1\,200 \cdot a_{\overline{n}|i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{-1}(1+i)^3 \geq 10\,000.$$

Da questa si ricava

$$a_{\overline{n}|i_{1/n}} \geq \frac{10\,000}{1\,200(1+i_{1/4})^{-1}(1+i)^3} \qquad \Big(= A \approx 6.41\Big).$$

La disequazione equivale a sua volta alle seguenti

$$\frac{1-(1+i_{1/4})^{-n}}{i_{1/4}} \geq A \quad \Leftrightarrow \quad (1+i_{1/4})^{-n} \leq 1 - i_{1/4}A$$

e ancora, applicando i logaritmi,

$$-n\ln(1+i_{1/4}) \leq \ln(1-i_{1/4}A) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1-i_{1/4}A)}{\ln(1+i_{1/4})} = 7.05.$$

Questo dice che possiamo costituire il capitale con 7 rate intere di 1 200€ più un residuo. Calcoliamo ora il residuo. Dato che l'ultima rata è alla fine del 2° anno, possiamo calcolare il residuo direttamente in $t = 2$.

$$\text{RES}_2 = 10\,000(1+i)^{-1} - 1\,200 a_{\overline{7}|i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{-1}(1+i)^2 = 58.22€.$$

ESERCIZIO 3. Una società finanziaria, relativamente ad un bene con prezzo di listino $P = 10\,000€$, vuole proporre ad un cliente un contratto di leasing di durata 3 anni che prevede un anticipo del 10% del prezzo di listino, un riscatto pari al 5% del prezzo di listino e il versamento di 12 canoni trimestrali posticipati. La società può avere uno sconto del 10% sull'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto un tasso di interesse annuo dell'8%. Si scriva l'equazione del valore per la società di leasing e si determini a quanto deve ammontare il canone da proporre al cliente.

Sapendo che il cliente può avere uno sconto del 2% sull'acquisto del bene, si scriva l'equazione del valore per il cliente. Sapendo infine che il cliente per l'acquisto diretto del bene può avere un prestito dalla sua banca al tasso di interesse annuo del 5%, si dica se egli ragionevolmente sceglierà il prestito bancario o il contratto di leasing.

Le quantità rilevanti nel contratto sono il prezzo di listino $P = 10\,000€$, l'anticipo $A = P \cdot 0.1 = 1\,000€$ e il riscatto finale $F = P \cdot 0.05 = 500€$.

La società finanziaria spende $10\,000 \cdot (1-0.1) = 9\,000€$ per l'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto di leasing un tasso di interesse $i = 8\%$. Serve il tasso di interesse trimestrale $i_{1/4} = 1.1^{1/4} - 1 = 0.019426546$.

Indicato con R il canone trimestrale, l'equazione del valore per la società di leasing è

$$9\,000 = 1\,000 + R \cdot a_{\overline{12}|i_{1/4}} + 500(1+i)^{-3}.$$

Da questa si ricava

$$R = \frac{9\,000 - 1\,000 - 500(1+i)^{-3}}{a_{\overline{12}|i_{1/4}}} = 716.41€.$$

Ora passiamo alla valutazione del cliente, al quale viene proposto un contratto di leasing con le caratteristiche ottenute poco fa (cioè un anticipo di 1 000€, un riscatto finale di 500€ e un canone di 12 rate trimestrali di 716.41€). Tenendo conto che il cliente può avere uno sconto del 2% sul prezzo d'acquisto del bene (sconto di 200€), egli è interessato a scoprire qual è il tasso implicito nell'equivalenza finanziaria tra lo spendere oggi $10\,000 - 200 = 9\,800€$ e distribuire il pagamento nel tempo alle condizioni del contratto.

La sua equazione del valore è quindi

$$9\,800 = 1\,000 + 716.41 a_{\overline{12}|i_{1/4}} + 500(1+i)^{-3},$$

con un tasso i questa volta incognito.

La soluzione esatta di questa equazione fornirebbe al cliente un valore preciso da confrontare con il tasso del 5% proposto dalla banca per un prestito di 9 800€. Ma la risoluzione esatta (in realtà approssimata) di questa equazione richiederebbe l'uso di approssimazioni successive, eventualmente con il metodo di Newton, e non è richiesta.

Per poter dire quale sarà la scelta ragionevole del cliente tra stipulare il contratto di leasing e chiedere un prestito alla banca al tasso $i^{(B)} = 5\%$ possiamo semplicemente calcolare il valore attuale degli importi relativi al contratto al tasso della banca. Dopo aver calcolato il tasso equivalente trimestrale $i^{(B)}_{1/4}$, si trova

$$1\,000 + 716.41 a_{\overline{12}|i^{(B)}_{1/4}} + 500(1+i^{(B)})^{-3} = 9\,380€.$$

Dato che $9\,380 < 9\,800$, il tasso della banca sconta maggiormente gli importi rispetto al tasso effettivo incognito e quindi il tasso della banca è maggiore rispetto al tasso del contratto.

Il cliente ragionevolmente sceglierà il contratto di leasing.

ESERCIZIO 4. Per rimborsare in 4 anni un debito di 1 000€, si usa un piano di ammortamento con le seguenti caratteristiche:

- una rata R_1 alla fine del 1° anno, comprensiva di quota capitale e quota interessi,
- una rata R_2 alla fine del 2° anno, comprensiva di quota capitale e quota interessi,
- una rata R_3 alla fine del 3° anno, comprensiva della sola quota interessi,
- una rata R_4 alla fine del 4° anno, comprensiva di quota capitale e quota interessi.

Si costruisca il piano di ammortamento, sapendo che $I_2 = 70$, $C_2 = 400$.

Si assuma un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

✎

I dati permettono di partire dal prospetto qui a fianco.

t	$R_k = C_k + I_k$	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	1 000
1	·	·	·	·
2	·	400	70	·
3	·	0	·	·
4	·	·	·	·

Dato che le quote interessi sono posticipate, possiamo ricavare subito la prima quota interessi

$$I_1 = 0.1 \cdot 1\,000 = 100.$$

Non possiamo dire subito quale sia la prima quota capitale, ma possiamo ricavare il debito residuo in $t = 1$ dalla quota interessi I_2. Infatti, dato che

$$I_2 = i \cdot D_1, \text{ da questa si ricava } D_1 = \frac{I_2}{i} = \frac{70}{0.1} = 700.$$

A questo punto il piano è "sbloccato". Possiamo in sequenza ricavare le altre quantità.

$$\text{Da } D_1 = D_0 - C_1 \text{ si ricava } C_1 = D_0 - D_1 = 1\,000 - 700 = 300;$$

$$D_2 = D_1 - C_2 = 700 - 400 = 300;$$

$$I_3 = i \cdot D_2 = 0.1 \cdot 300 = 30.$$

Al terzo anno non c'è quota capitale da versare e quindi il debito residuo rimane inalterato ($D_3 = D_2 = 300$). Nell'ultimo anno abbiamo la quota interessi $I_4 = i \cdot D_3 = 0.1 \cdot 300 = 30$ e l'ultima quota capitale ($C_4 = D_3 = 300$) che annulla il debito residuo. Il prospetto complessivo è questo.

t	$R_k = C_k + I_k$	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	1 000
1	400	300	100	700
2	470	400	70	300
3	30	0	30	300
4	330	300	30	0

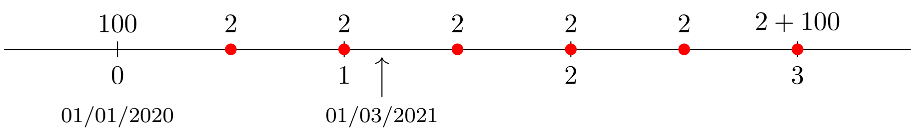
PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 17/01/2020

ESERCIZIO 1. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/01/2020 con le seguenti caratteristiche:
- valore facciale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza tra 3 anni;
- cedole semestrali con tasso cedolare $r = 4\%$;
- prezzo di emissione alla pari.

Non si consideri la tassazione. Si dica se ci sono motivi evidenti per affermare che il tasso di rendimento a scadenza all'emissione è del 4%. In caso contrario si trovi se il tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 4%.

Si determini poi il prezzo tel quel dell'obbligazione il 01/03/2021 ipotizzando un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 3%.

✎



Ci sarebbero evidenti motivi per affermare che il tasso di rendimento a scadenza all'emissione è del 4% se le cedole fossero annuali. Infatti in tal caso l'equazione

$$100 = 4 \cdot a_{\overline{n}|ytm} + 100(1 + ytm)^{-n}, \text{ equivalente a } 100 = 4 \cdot \frac{1 - (1 + ytm)^{-n}}{ytm} + 100(1 + ytm)^{-n}$$

e quindi a

$$100(1 - (1 + ytm)^{-n}) = 4 \cdot \frac{1 - (1 + ytm)^{-n}}{ytm} \text{ e pertanto a } 100 = 4 \cdot \frac{1}{ytm},$$

avrebbe come soluzione appunto $ytm = 4\%$. Le cedole sono però semestrali e quindi la risposta è no.

Troviamo quindi se il tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 4%. L'equazione è

$$100 = 2 \cdot a_{\overline{6}|ytm_{1/2}} + 100(1 + ytm)^{-3}.$$

Se calcoliamo il termine di destra ad un tasso del 4% annuo (quindi un equivalente tasso semestrale 0.019803902) si ottiene il valore $100.11 > 100$. Pertanto il vero tasso di rendimento a scadenza è maggiore del 4%.

Veniamo ora all'ultima domanda: determinare il prezzo tel quel dell'obbligazione il 01/03/2021 ipotizzando un tasso di rendimento a scadenza in questa data del 3%. Alla data del 01/03/2021 restano da incassare 4 cedole. L'equazione del prezzo tel quel è

$$P_{\text{tq}} = 2 \cdot a_{\overline{4}|0.03_{1/2}} \left(1 + 0.03_{1/2}\right)^{2/6} + 100 \left(1 + 0.03_{1/2}\right)^{-4+2/6} = 102.47.$$

ESERCIZIO 2. Il B.T.P. denominato `Btp-1mz26 4,5%`, con scadenza il 01/03/2026, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 4.5\%$. Il 14/01/2020 era quotato (corso secco) a 121.81. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

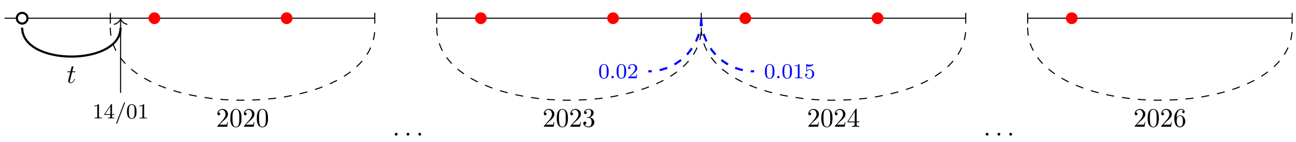
Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 14/01/2020, di reinvestire le cedole fino al 31/12/2023 al tasso del 2% e successivamente, fino alla scadenza, al tasso del 1.5%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Qui si consideri la tassazione.)

✎

Il titolo paga le cedole al 01/03 e al 01/09. La rappresentazione nella pagina seguente mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dalla data del 14/01/2020.

Non consideriamo la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2} F = \frac{0.045}{2} \cdot 100 = 2.25.$$



Fino alla scadenza del 01/03/2026 il titolo paga $n = 13$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/09/2019) è $t = 30 \cdot 4 + 14 = 134$ giorni. Calcoliamo il prezzo tel quel.

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 121.81 + 2.25 \cdot \frac{134}{180} = 123.485.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 2.25 \cdot \mathrm{a}_{\overline{13}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{134/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-13+134/180}.$$

Come si sa il calcolo della soluzione esatta è problematico. Viene chiesto solo di dire se il tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. Basta calcolare il termine di destra al tasso dell'1% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente $0.01_{1/2} = 0.004987562$): si trova il valore $122.44 < P_{\text{tq}}$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza era minore dell'1%.

Passiamo ora alla seconda domanda. L'ipotesi è di aver acquistato il titolo in data 14/01/2020. Dato che ora dobbiamo considerare la tassazione, la cedola netta è

$$\textsc{Ced} = 2.25(1 - 0.125) = 1.96875.$$

Occorre anche ricalcolare il prezzo di acquisto.

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 121.81 + 1.96875 \cdot \frac{134}{180} = 123.276.$$

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. I montanti vanno calcolati alla scadenza, cioè alla data del 01/03/2026. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso del 2% fino a tutto il 2023 e successivamente, fino alla scadenza, al tasso del 1.5%.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-134/360+6+6/12}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2023, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 8 cedole da valutare al tasso $i^{(1)} = 2\%$ (montante M_1) e le restanti 5 cedole al tasso $i^{(2)} = 1.5\%$ (montante M_2).

Servono i tassi semestrali equivalenti

$$0.02_{1/2} = 0009950494 \qquad \text{e} \qquad 0.015_{1/2} = 0.007472084.$$

Si ha (attenzione ai tassi e alla corrispondente misura dei tempi)

$$M_1 = \textsc{Ced} \cdot \mathrm{a}_{\overline{8}|0.02_{1/2}} \left(1 + 0.02_{1/2}\right)^{8+4/6} \cdot (1 + 0.015)^{2+2/12} = 16.956$$

e

$$M_2 = \textsc{Ced} \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|0.015_{1/2}} \cdot \left(1 + 0.015_{1/2}\right)^{5} = 9.992.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-134/360+6+6/12} = M_1 + M_2 + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(-134/360+6+6/12)} - 1 = 0.00480145.$$

ESERCIZIO 3. Data la seguente struttura per scadenza dei tassi a pronti (su base annua)

$$i(0,1) = 0.02 \quad , \quad i(0,2) = 0.03 \quad , \quad i(0,3) = 0.02$$

si determinino i corrispondenti fattori di sconto a pronti e il tasso a termine $i(0,1,3)$ su base annua. Successivamente si trovi il prezzo (coerente con la struttura) dell'obbligazione con scadenza 3 anni, che paga cedole pari a 10, 20, 30 nei tre anni e rimborsa 100 alla scadenza. Si trovi infine la duration di questo titolo.

✎

Per il calcolo dei fattori di sconto della struttura basta utilizzare le relazioni tra le grandezze fondamentali della Matematica finanziaria.[1]

$$v(0,1) = \frac{1}{1+i(0,1)} = \frac{1}{1+0.02} = 0.980392156;$$

$$v(0,2) = \frac{1}{(1+i(0,2))^2} = \frac{1}{(1+0.03)^2} = 0.942595909; \ ^2$$

$$v(0,3) = \frac{1}{(1+i(0,3))^3} = \frac{1}{(1+0.02)^3} = 0.942322334.$$

Ora possiamo calcolare il tasso a termine $i(0,1,3)$. Possiamo calcolare prima il fattore di sconto a termine $v(0,1,3)$, dato dall'espressione

$$v(0,1,3) = \frac{v(0,3)}{v(0,1)} = 0.961168781.$$

Questo è un fattore relativo a 2 anni e quindi la formula

$$i(0,1,3)_p = \frac{1}{v(0,1,3)} - 1 = 0.0404$$

fornisce un tasso periodale (su 2 anni). Occorre fare la conversione nel tasso annuo con

$$i(0,1,3) = (1+i(0,1,3)_p)^{1/2} - 1 = 0.02.$$

Il risultato non deve sorprendere e anzi potevamo capire a priori che sarebbe stato questo: Infatti il tasso a termine nell'intervallo di tempo $(1,3)$ dipende dai tassi a pronti a 1 e a 3 anni, che sono uguali! Quindi anche il tasso a termine è uguale ai due tassi a pronti.

Ora passiamo alla domanda successiva: si trovi il prezzo dell'obbligazione con scadenza 3 anni, che paga cedole pari a 10, 20, 30 nei tre anni e rimborsa 100 alla scadenza. Il prezzo è dato dal valore attualizzato e cumulato degli importi pagati dal titolo.

$$P_0 = 10 \cdot v(0,1) + 20 \cdot v(0,2) + 130 \cdot v(0,3) = 151.16.$$

Infine la duration di questo stesso titolo. Dalla formula generale della duration

$$D_0 = \frac{1}{P_0}\Big(1 \cdot 10 \cdot v(0,1) + 2 \cdot 20 \cdot v(0,2) + 3 \cdot 130 \cdot v(0,3)\Big) = 2.746.$$

[1] In particolare qui servono le relazioni tra il tassi di interesse i e il fattore di sconto v:

$$v = \frac{1}{1+i} \qquad \text{e} \qquad i = \frac{1}{v} - 1.$$

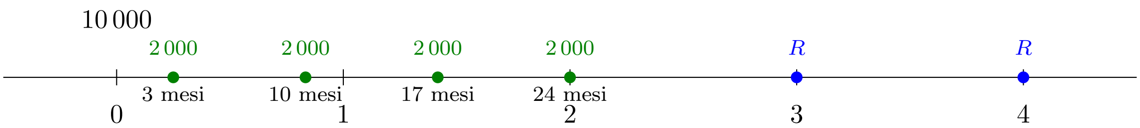
[2] Si faccia attenzione: qui il tasso di interesse è dato su base annua, ma è riferito ad un periodo di 2 anni.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 17/01/2020

ESERCIZIO 1. Un prestito di 10 000€ viene *parzialmente* restituito in 4 rate di 2 000€, la prima tra 3 mesi e le altre ogni 7 mesi. Si calcoli il debito residuo tra 2 anni.

Nell'ipotesi di dover poi restituire il residuo in 2 rate uguali, da versare alla fine del 3° e del 4° anno, si calcoli l'ammontare di tale rata. Il tasso di interesse annuo da applicare è $i = 10\%$.

✎



Vista la cadenza delle prime rate conviene calcolare il tasso su base 7 mesi equivalente al tasso annuo $i = 10\%$:

$$i_{7/12} = 1.1^{7/12} - 1 = 0.057172197.$$

Calcoliamo ora quanto viene accumulato con le 4 rate di 2 000€ dopo 2 anni.

$$V_2 = 2\,000 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|i_{7/12}}(1+0.1)^{4/12}(1+0.1)^2 = 8\,712.59€.$$

Il debito residuo tra 2 anni è pertanto

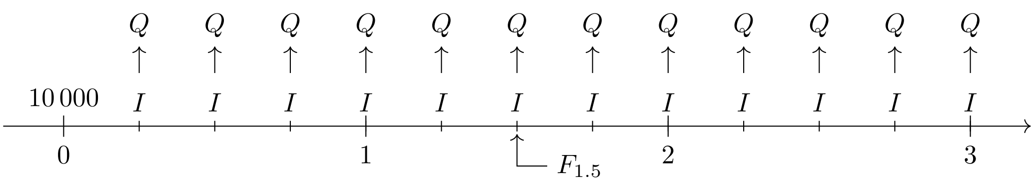
$$D_2 = 10\,000(1+0.1)^2 - V_2 = 3\,387.41€.$$

La restituzione del prestito avviene ora con 2 rate uguali (le indico con R), da versare alla fine del 3° e del 4° anno. L'equazione del valore è a questo punto

$$D_2 = R(1+0.1)^{-1} + R(1+0.1)^{-2}, \text{ da cui ricavo } R = \frac{D_2}{(1+0.1)^{-1} + (1+0.1)^{-2}} = 1\,951.79.$$

ESERCIZIO 2. Per la restituzione di un prestito di 10 000€ si usa un piano di ammortamento americano a due tassi di 3 anni, con quote interessi e quote di accumulazione trimestrali posticipate. Per gli interessi il tasso a debito è del 10% annuo, mentre per la restituzione del capitale le quote di accumulazione sono valutate al tasso del 2% annuo. Si determini l'ammontare della quota interessi I e della quota di accumulazione Q. Si calcoli il fondo di accumulazione dopo 1 anno e mezzo. Si scriva l'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo dell'ammortamento e si stabilisca se questo è maggiore del 15%.

✎



Serve il tasso trimestrale equivalente al tasso annuo del 10%: $i_{1/4} = (1+0.1)^{1/4} - 1 = 0.024113689.$

La quota interessi I (trimestrale) è uguale agli interessi trimestrali sull'intero debito. Quindi si ha

$$I = 10\,000 \cdot i_{1/4} = 241.14€.$$

Indicando con Q la quota di accumulazione, anch'essa trimestrale, e con $i^\star = 0.02$ il tasso di accumulazione, serve anche qui l'equivalente tasso trimestrale. $i^\star_{1/4} = (1+0.02)^{1/4} - 1 = 0.004962931.$

Q si determina in modo che il montante delle 12 quote sia uguale al capitale mutuato. Quindi essa deve soddisfare l'equazione

$$Q\mathrm{a}_{\overline{12}|i^\star_{1/4}}(1+i^\star)^3 = 10\,000,$$

da cui

$$Q = \frac{10\,000}{\mathrm{a}_{\overline{12}|i^\star_{1/4}}(1+i^\star)^3} = 810.83€.$$

Il fondo di accumulazione F_t dopo 1 anno e mezzo è il valore delle quote di accumulazione già versate dopo 1 anno e mezzo, cioè all'epoca $t = 1.5$. Dato che all'epoca t sono state versate 6 quote di accumulazione, si ha

$$F_{1.5} = Q\mathrm{a}_{\overline{6}|i^\star_{1/4}}(1+i^\star)^{1.5} = 4\,925.74€.$$

L'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo i_{eff} dell'ammortamento è

$$(I+Q)\cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|(i_{\text{eff}})_{1/4}} = 10\,000.$$

Con un tasso di prova del 15%, e un tasso equivalente trimestrale $0.15_{1/4} = 0.035558076$, si trova un valore

$$10\,132.23 > 10\,000.$$

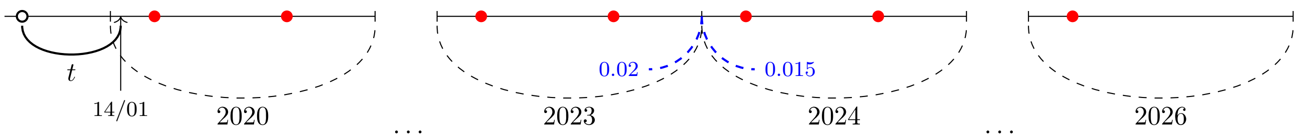
Quindi il tasso effettivo è maggiore del 15%.

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. denominato `Btp-1mz26 4,5%`, con scadenza il 01/03/2026, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 4.5\%$. Il 14/01/2020 era quotato (corso secco) a 121.81. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 14/01/2020, di reinvestire le cedole fino al 31/12/2023 al tasso del 2% e successivamente, fino alla scadenza, al tasso del 1.5%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Qui si consideri la tassazione.)

✎

Il titolo paga le cedole al 01/03 e al 01/09. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dalla data del 14/01/2020.



Non consideriamo la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.045}{2}\cdot 100 = 2.25.$$

Fino alla scadenza del 01/03/2026 il titolo paga $n = 13$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/09/2019) è $t = 30\cdot 4 + 14 = 134$ giorni. Calcoliamo il prezzo tel quel.

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 121.81 + 2.25\cdot\frac{134}{180} = 123.485.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 2.25\cdot \mathrm{a}_{\overline{13}|ytm_{1/2}}(1+ytm_{1/2})^{134/180} + 100(1+ytm_{1/2})^{-13+134/180}.$$

Come si sa il calcolo della soluzione esatta è problematico. Viene chiesto solo di dire se il tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. Basta calcolare il termine di destra al tasso dell'1% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente $0.01_{1/2} = 0.004987562$): si trova il valore $122.44 < P_{\text{tq}}$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza era minore dell'1%.

Passiamo ora alla seconda domanda. L'ipotesi è di aver acquistato il titolo in data 14/01/2020. Dato che ora dobbiamo considerare la tassazione, la cedola netta è

$$\text{Ced} = 2.25(1 - 0.125) = 1.96875.$$

Occorre anche ricalcolare il prezzo di acquisto.

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 121.81 + 1.96875 \cdot \frac{134}{180} = 123.276.$$

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. I montanti vanno calcolati alla scadenza, cioè alla data del 01/03/2026. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso del 2% fino a tutto il 2023 e successivamente, fino alla scadenza, al tasso del 1.5%.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-134/360+6+6/12}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2023, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 8 cedole da valutare al tasso $i^{(1)} = 2\%$ (montante M_1) e le restanti 5 cedole al tasso $i^{(2)} = 1.5\%$ (montante M_2).

Servono i tassi semestrali equivalenti

$$0.02_{1/2} = 0009950494 \qquad \text{e} \qquad 0.015_{1/2} = 0.007472084.$$

Si ha (attenzione ai tassi e alla corrispondente misura dei tempi)

$$M_1 = \text{Ced} \cdot a_{\overline{8}|0.02_{1/2}} \left(1 + 0.02_{1/2}\right)^{8+4/6} \cdot (1 + 0.015)^{2+2/12} = 16.956$$

e

$$M_2 = \text{Ced} \cdot a_{\overline{5}|0.015_{1/2}} \cdot \left(1 + 0.015_{1/2}\right)^{5} = 9.992.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-134/360+6+6/12} = M_1 + M_2 + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(-134/360+6+6/12)} - 1 = 0.00480145.$$

ESERCIZIO 4. Data la seguente struttura per scadenza dei tassi a pronti (su base annua)

$$i(0,1) = 0.02 \quad , \quad i(0,2) = 0.03 \quad , \quad i(0,3) = 0.02$$

si determinino i corrispondenti fattori di sconto a pronti e il tasso a termine $i(0,1,3)$ su base annua. Successivamente si trovi il prezzo (coerente con la struttura) dell'obbligazione con scadenza 3 anni, che paga cedole pari a 10, 20, 30 nei tre anni e rimborsa 100 alla scadenza. Si trovi infine la duration di questo titolo.

✎

Per il calcolo dei fattori di sconto della struttura basta utilizzare le relazioni tra le grandezze fondamentali della Matematica finanziaria.[3]

$$v(0,1) = \frac{1}{1 + i(0,1)} = \frac{1}{1 + 0.02} = 0.980392156;$$

$$v(0,2) = \frac{1}{(1 + i(0,2))^2} = \frac{1}{(1 + 0.03)^2} = 0.942595909;$$ [4]

[3] In particolare qui servono le relazioni tra il tassi di interesse i e il fattore di sconto v:

$$v = \frac{1}{1+i} \qquad \text{e} \qquad i = \frac{1}{v} - 1.$$

$$v(0,3) = \frac{1}{(1+i(0,3))^3} = \frac{1}{(1+0.02)^3} = 0.942322334.$$

Ora possiamo calcolare il tasso a termine $i(0,1,3)$. Possiamo calcolare prima il fattore di sconto a termine $v(0,1,3)$, dato dall'espressione

$$v(0,1,3) = \frac{v(0,3)}{v(0,1)} = 0.961168781.$$

Questo è un fattore relativo a 2 anni e quindi la formula

$$i(0,1,3)_p = \frac{1}{v(0,1,3)} - 1 = 0.0404$$

fornisce un tasso periodale (su 2 anni). Occorre fare la conversione nel tasso annuo con

$$i(0,1,3) = (1+i(0,1,3)_p)^{1/2} - 1 = 0.02.$$

Il risultato non deve sorprendere e anzi potevamo capire a priori che sarebbe stato questo: Infatti il tasso a termine nell'intervallo di tempo $(1,3)$ dipende dai tassi a pronti a 1 e a 3 anni, che sono uguali! Quindi anche il tasso a termine è uguale ai due tassi a pronti.

Ora passiamo alla domanda successiva: si trovi il prezzo dell'obbligazione con scadenza 3 anni, che paga cedole pari a 10, 20, 30 nei tre anni e rimborsa 100 alla scadenza. Il prezzo è dato dal valore attualizzato e cumulato degli importi pagati dal titolo.

$$P_0 = 10 \cdot v(0,1) + 20 \cdot v(0,2) + 130 \cdot v(0,3) = 151.16.$$

Infine la duration di questo stesso titolo. Dalla formula generale della duration

$$D_0 = \frac{1}{P_0}\Big(1 \cdot 10 \cdot v(0,1) + 2 \cdot 20 \cdot v(0,2) + 3 \cdot 130 \cdot v(0,3)\Big) = 2.746.$$

[4] Si faccia attenzione: qui il tasso di interesse è dato su base annua, ma è riferito ad un periodo di 2 anni.

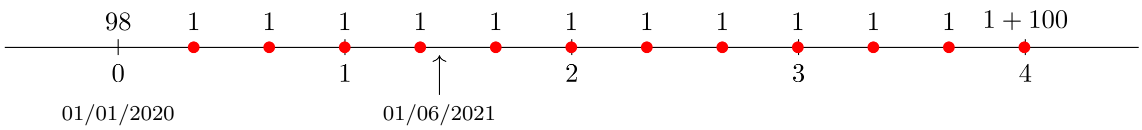
PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 03/02/2020

ESERCIZIO 1. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/01/2020 con le seguenti caratteristiche:
- valore facciale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza tra 4 anni;
- cedole quadrimestrali con tasso cedolare $r = 3\%$;
- prezzo di emissione $P_0 = 98$.

Non si consideri la tassazione. Si trovi una prima stima approssimata del tasso di rendimento a scadenza e si dica poi se questo è maggiore o minore del 3.5%.

Successivamente, supponendo che il tasso di rendimento a scadenza al 01/06/2021 sia del 2%, che il prezzo tel quel a quella data sia 102.50 e che il valore di rimborso possa non essere alla pari, si determini questo valore di rimborso.

Poniamo $F = 100$, $n = 12$, $C = 100$, $r = 0.03$, $P_0 = 98$. Non consideriamo la tassazione.
La cedola risulta $\frac{r}{3}F = \frac{0.03}{3} \cdot 100 = 1$.
Una rappresentazione può essere la seguente.



Determiniamo una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza ytm all'emissione.

$$ytm^0_{1/3} = \frac{\frac{r}{3}F + (C - P_0)/n}{(C + 2P_0)/3} = \frac{1 + (100 - 98)/12}{(100 + 2 \cdot 98)/3} = 0.011824324 \quad \text{(quadrimestrale)},$$

che corrisponde ad un tasso annuo $ytm^0 = 0.03589407$.

Troviamo ora se il tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore del 3.5%. L'equazione per il tasso di rendimento a scadenza è

$$98 = 1 \cdot a_{\overline{12}|ytm_{1/3}} + 100(1 + ytm)^{-4}.$$

Con un tasso del 3.5% annuo si ottiene

$$98 = 1 \cdot a_{\overline{12}|0.035_{1/3}} + 100(1 + 0.035)^{-4} = 98.29 > 98.$$

Pertanto il vero tasso di rendimento a scadenza è maggiore del 3.5%.

Veniamo ora all'ultima domanda: supponendo che il tasso di rendimento a scadenza al 01/06/2021 sia del 2%, che il prezzo tel quel a quella data sia 102.50 e che il valore di rimborso possa non essere alla pari, si determini questo valore di rimborso. Alla data del 01/06/2021 ci sono ancora 8 cedole da incassare. Indico con C il valore di rimborso. L'equazione è

$$1 \cdot a_{\overline{8}|0.02_{1/3}}(1 + 0.02)^{1/12} + C(1 + 0.02_{1/3})^{-8+1/4} = 102.50.$$

Da questa si ricava il valore di rimborso

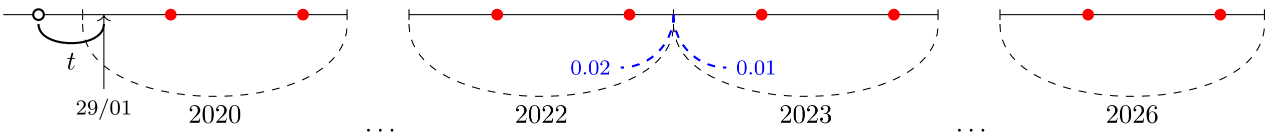
$$C = \frac{102.50 - a_{\overline{8}|0.02_{1/3}}(1 + 0.02)^{1/12}}{(1 + 0.02_{1/3})^{-8+1/4}} = 99.69.$$

ESERCIZIO 2. Il B.T.P. denominato `Btp-1nv26 7,25%`, con scadenza il 01/11/2026, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 7.25\%$. Il 29/01/2020 era quotato (corso secco) a 144.02. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 29/01/2020, di reinvestire le cedole fino al 31/12/2022 al tasso del 2% e successivamente, fino alla scadenza, al tasso dell'1%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Qui si consideri la tassazione.)

✎

Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dall'anno 2020, in cui viene valutato.



Relativamente alla data di valutazione del 29/01/2020 le cedole da considerare sono 14. I giorni dallo stacco dell'ultima cedola sono $t = 30 + 30 + 29 = 89$. La cedola (non tassata) è

$$\frac{r}{2} \cdot 100 = \frac{0.075}{2} \cdot 100 = 3.625.$$

Il rateo è

$$\text{rateo} = 3.625 \cdot \frac{89}{180} = 1.792.$$

Il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 144.02 + 1.792 = 145.812.$$

L'equazione del valore che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 3.625 \cdot \mathrm{a}_{\overline{14}|ytm_{1/2}} (1 + ytm_{1/2})^{89/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-14+89/180}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore dell'1%. Calcolando il termine di destra al tasso dell'1% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente) si trova il valore $142.523 < P_{\text{tq}}$. Possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza è minore dell'1%.

Passiamo ora alla seconda domanda. Acquistiamo il titolo in data 29/01/2020 e reinvestiamo le cedole fino al 31/12/2022 al tasso del 2% e successivamente, fino alla scadenza, al tasso dell'1%. Dobbiamo determinare il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P., considerando ora la tassazione.

La cedola netta è

$$\textsc{Ced} = 3.625(1 - 0.125) = 3.172.$$

Il rateo diventa

$$\text{rateo} = 3.172 \cdot \frac{89}{180} = 1.568.$$

Il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 144.02 + 1.568 = 145.588.$$

Non c'è tassazione sul capitale dato che il titolo è certamente acquistato sopra la pari.

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/11/2026, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-89/360+7}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. A seguito del cambio di tasso, calcoliamo i due montanti delle cedole fino al 31/12/2022 (6 cedole) e successivamente a tale data (8 cedole). Si ha

$$M_1 = 3.172 \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|0.02_{1/2}} (1 + 0.02)^{3+60/360} (1 + 0.01)^{4-60/360} = 20.337$$

e

$$M_2 = 3.172 \cdot a_{\overline{8}|0.01_{1/2}} (1+0.01)^4 = 25.823.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1+i_{\text{eff}})^{-89/360+7} = M_1 + M_2 + 100,$$

da cui si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(7-89/360)} - 1 = 0.000581677.$$

ESERCIZIO 3. Data la seguente struttura per scadenza di tassi a pronti e a termine (su base annua)

$$i(0,1) = 5\% \quad , \quad i(0,1,2) = 4\% \quad , \quad i(0,3) = 4\% \quad , \quad i(0,2,4) = 5\%$$

si calcoli tutta la struttura a termine dei tassi a pronti (su base annua) e il tasso a termine $i(0,1,3)$. Successivamente si trovi il prezzo (coerente con la struttura) dell'obbligazione con scadenza 4 anni, che paga cedole annue al tasso cedolare $r = 5\%$ e rimborsa 100 alla scadenza. Si trovi infine la corrispondente duration di questo titolo.

✎

Abbiamo alcuni tassi a pronti e alcuni tassi a termine della struttura. Dobbiamo calcolare quello che resta della struttura dei tassi a pronti, e cioè il tasso a pronti a due anni $i(0,2)$ e il tasso a pronti a quattro anni $i(0,4)$. Il primo è immediato, dato che[5]

$$1 + i_p(0,2) = \big(1+i(0,1)\big)\big(1+i(0,1,2)\big), \text{ da cui si ricava } i_p(0,2) = \big(1+i(0,1)\big)\big(1+i(0,1,2)\big) - 1 = 0.092.$$

Quest'ultimo è un tasso biennale, dal quale si ricava il tasso annuo

$$i_a(0,2) = \big(1+i_p(0,2)\big)^{1/2} - 1 = 0.044988038.$$

A questo punto possiamo trovare il tasso a quattro anni usando il tasso a pronti a due anni appena trovato e il tasso a termine tra 2 e 4 anni. Si ha

$$1 + i_p(0,4) = \big(1+i_p(0,2)\big)\big(1+i(0,2,4)\big)^2, \text{ da cui si ricava } i_p(0,4) = \big(1+i_p(0,2)\big)\big(1+i(0,2,4)\big)^2 - 1 = 0.20393,$$

che è un tasso quadriennale, da cui si ricava il tasso annuo

$$i_a(0,4) = \big(1+i_p(0,4)\big)^{1/4} - 1 = 0.047491021.$$

Ora il tasso a termine $i(0,1,3)$. Dalla relazione

$$\big(1+i(0,1)\big)\big(1+i_p(0,1,3)\big) = 1 + i_p(0,3)$$

si può ricavare il tasso a termine voluto su base biennale

$$i_p(0,1,3) = \frac{1+i_p(0,3)}{1+i(0,1)} - 1 = 0.071299047,$$

da cui si trova il tasso su base annua

$$i_a(0,1,3) = \big(1+i_p(0,3)\big)^{1/2} - 1 = 0.035035771.$$

Ora passiamo alla domanda successiva: il prezzo dell'obbligazione dell'obbligazione con scadenza 4 anni, che paga cedole annue al tasso cedolare $r = 5\%$ e rimborsa 100 alla scadenza. Il prezzo è dato dal valore attualizzato e cumulato degli importi pagati dal titolo.

$$P_0 = 5 \cdot 1,05^{-1} + 5 \cdot 1,04^{-1} 1,05^{-1} + 5 \cdot 1,04^{-3} + 105 \cdot 1,05^{-2} 1,04^{-1} 1,05^{-1} = 101.$$ [6]

Infine la duration di questo stesso titolo. Dalla formula generale della duration

$$D_0 = \frac{1}{P_0}\Big(1 \cdot 5 \cdot (1+i(0,1))^{-1} + 2 \cdot 5 \cdot (1+i(0,2))^{-2} + 3 \cdot 5 \cdot (1+i(0,3))^{-3} + 4 \cdot 105 \cdot (1+i(0,4))^{-4}\Big) = 3.72$$

[5]Indico con i_p un tasso periodale, cioè su base non annua, e con i_a un tasso su base annua. Quando non scrivo nulla sottintendo una base annua.

[6]Per il calcolo ho usato solo dati originari del problema, con tassi a pronti e a termine. Si poteva anche utilizzare solo la struttura dei tassi a pronti trovata, e cioè

$$P_0 = 5 \cdot (1+i(0,1))^{-1} + 5 \cdot (1+i(0,2))^{-2} + 5 \cdot (1+i(0,3))^{-3} + 105 \cdot (1+i(0,4))^{-4}.$$

Chiaramente in questa formula i tassi devono essere espressi su base annua.

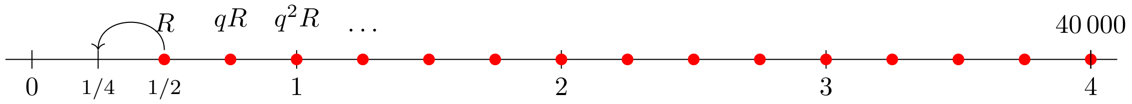
ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 03/02/2020

ESERCIZIO 1. Si vuole costituire un capitale di 40 000€ in 4 anni, con versamenti trimestrali posticipati di importi in progressione geometrica di ragione trimestrale $q = 1.1$,[7] il primo dei quali tra 6 mesi. Il tasso di interesse annuo sul deposito è del 5%. Si determinino il primo e l'ultimo importo da versare.

Supponendo poi che tra 2 anni si manifesti la necessità di prelevare dal deposito l'importo di 10 000€ (subito dopo il versamento della rata corrispondente), si provi che questo è possibile (senza "andare in rosso") e si determini il capitale effettivamente costituito alla fine dell'operazione, al 4° anno.

✎

Ecco uno schema del piano di accumulo.



Vista la cadenza delle prime rate conviene calcolare il tasso equivalente trimestrale:

$$i_{1/4} = (1 + 0.05)^{1/4} - 1 = 0.012272234.$$

La formula che fornisce il valore attuale di una rendita con rate in progressione geometrica, con prima rata (posticipata) R, ragione della progressione q e durata n è

$$V_0 = \begin{cases} Rv\dfrac{1-(qv)^n}{1-qv} & \text{se } qv \neq 1 \\ nRv & \text{se } qv = 1 \end{cases}$$

Il fattore di sconto v deve essere quello trimestrale, cioè $v_{1/4} = \frac{1}{1+i_{1/4}} = 0.987876574$. Pertanto il termine qv della formula è $1.1 \cdot v_{1/4} = 1.086664202$. Va osservato che la formula del "valore attuale" fornisce il valore cumulato delle rate in $t = \frac{1}{4}$. In considerazione di tutto questo l'equazione del valore è

$$40\,000 = R \cdot v_{1/4} \frac{1 - (qv_{1/4})^{15}}{1 - qv_{1/4}} \left(1 + i_{1/4}\right)^{15}$$

da cui si ricava la prima rata

$$R\ (= R_{t=1/2}) = 1\,178.95€.$$

L'ultima rata, quella in $t = 4$, si ottiene con

$$R_{t=4} = R \cdot q^{14} = 4\,477.05€.$$

Passiamo alla seconda parte del problema. Tra 2 anni c'è la necessità di prelevare dal deposito l'importo di 10 000€ (subito dopo il versamento della rata in $t = 2$). Calcoliamo il montante cumulato delle rate versate fino a quel momento (V_2). Si ha

$$V_2 = R \cdot v_{1/4} \frac{1 - (qv_{1/4})^7}{1 - qv_{1/4}} \left(1 + i_{1/4}\right)^7 = 11\,551.71€ \quad (> 10\,000€).$$

Pertanto è possibile prelevare 10 000€ dopo 2 anni.

A questo punto il capitale che effettivamente si costituisce alla fine dell'operazione, al 4° anno, è dato da

$$40\,000 - 10\,000(1 + 0.05)^2 = 28\,975€.$$

[7] Ricordo che q è il rapporto costante tra una rata e la precedente (tre mesi prima): praticamente vuol dire che l'importo della rata aumenta del 10% ogni tre mesi.

Si può anche verificare che allo stesso risultato si arriva sommando il valore residuo dopo il prelevamento al 2° anno, cioè $11\,551.71 - 10\,000 = 1\,551.71$€, al valore attuale (in $t = 2$) delle 8 rate che si versano negli ultimi 2 anni, e capitalizzando il tutto di 2 anni. Cioè con

$$\left(1\,551.71 + R \cdot v_{1/4} \frac{1-(qv_{1/4})^8}{1-qv_{1/4}} \left(1+i_{1/4}\right)^8\right) \cdot (1+0.05)^2.$$

ESERCIZIO 2. Per rimborsare in 3 anni un debito di 1 000€, si usa un piano di ammortamento con le seguenti caratteristiche:

- una prima quota interessi I_0 anticipata,
- una sola quota capitale C alla fine del 1° anno,
- una seconda quota interessi alla fine del 2° anno,
- un'ultima rata alla fine del 3° anno, comprensiva di quota capitale C e quota interessi.

Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Si effettui poi la verifica di equivalenza finanziaria tra quanto versato e il debito iniziale.

✎

Per quanto riguarda gli interessi il piano presenta una modalità in cui nel primo anno si pagano anticipatamente e nel secondo e terzo invece posticipatamente. Per la restituzione del capitale sono invece previste due quote (uguali) alla fine del primo e del terzo anno.

Pertanto le due quote capitale sono

$$C = 500€.$$

La quota interessi anticipata è

$$I_0 = d \cdot 1\,000 = \frac{0.1}{1+0.1} \cdot 1\,000 = 90.\overline{90}€.$$

Il piano di ammortamento può essere riassunto nello schema seguente:

k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	$90.\overline{90}$	0	$90.\overline{90}$	1 000
1	500	500	0	500
2	50	0	50	500
3	550	500	50	0

Dato che alla fine del primo anno il debito residuo è di 500€, la quota interessi alla fine del secondo anno è

$$I_2 = i \cdot 500 = 50€.$$

Alla fine del secondo anno non viene pagata una quota capitale e quindi il debito residuo rimane inalterato (500€). Questo fa sì che gli interessi da pagare alla fine del terzo anno siano ancora di 50€.

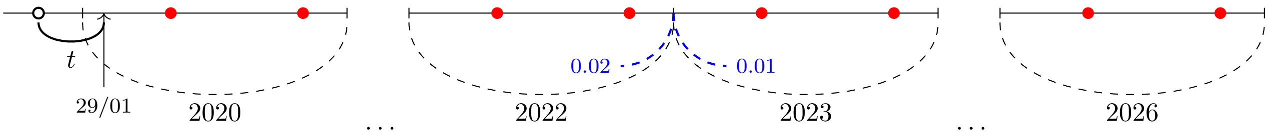
La verifica di equivalenza finanziaria tra quanto versato e il debito iniziale consiste nel calcolare

$$90.\overline{90} + 500 \cdot 1.1^{-1} + 50 \cdot 1.1^{-2} + 550 \cdot 1.1^{-3} = 1\,000.$$

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. denominato `Btp-1nv26 7,25%`, con scadenza il 01/11/2026, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 7.25\%$. Il 29/01/2020 era quotato (corso secco) a 144.02. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 29/01/2020, di reinvestire le cedole fino al 31/12/2022 al tasso del 2% e successivamente, fino alla scadenza, al tasso dell'1%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Qui si consideri la tassazione.)

✎



Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sopra mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dall'anno 2020, in cui viene valutato.

Relativamente alla data di valutazione del 29/01/2020 le cedole da considerare sono 14. I giorni dallo stacco dell'ultima cedola sono $t = 30 + 30 + 29 = 89$. La cedola (non tassata) è

$$\frac{r}{2} \cdot 100 = \frac{0.075}{2} \cdot 100 = 3.625.$$

Il rateo è

$$\text{rateo} = 3.625 \cdot \frac{89}{180} = 1.792.$$

Il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 144.02 + 1.792 = 145.812.$$

L'equazione del valore che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 3.625 \cdot \mathrm{a}_{\overline{14}|ytm_{1/2}} (1 + ytm_{1/2})^{89/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-14+89/180}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza è maggiore o minore dell'1%. Calcolando il termine di destra al tasso dell'1% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente) si trova il valore $142.523 < P_{\text{tq}}$. Possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza è minore dell'1%.

Passiamo ora alla seconda domanda. Acquistiamo il titolo in data 29/01/2020 e reinvestiamo le cedole fino al 31/12/2022 al tasso del 2% e successivamente, fino alla scadenza, al tasso dell'1%. Dobbiamo determinare il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P., considerando ora la tassazione.

La cedola netta è

$$\textsc{Ced} = 3.625(1 - 0.125) = 3.172.$$

Il rateo diventa

$$\text{rateo} = 3.172 \cdot \frac{89}{180} = 1.568.$$

Il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 144.02 + 1.568 = 145.588.$$

Non c'è tassazione sul capitale dato che il titolo è certamente acquistato sopra la pari.

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/11/2026, data di scadenza del titolo.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-89/360+7}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. A seguito del cambio di tasso, calcoliamo i due montanti delle cedole fino al 31/12/2022 (6 cedole) e successivamente a tale data (8 cedole). Si ha

$$M_1 = 3.172 \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|0.02_{1/2}} (1 + 0.02)^{3+60/360} (1 + 0.01)^{4-60/360} = 20.337$$

e

$$M_2 = 3.172 \cdot \mathrm{a}_{\overline{8}|0.01_{1/2}} (1 + 0.01)^4 = 25.823.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-89/360+7} = M_1 + M_2 + 100,$$

da cui si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(7-89/360)} - 1 = 0.000581677.$$

ESERCIZIO 4. Data la seguente struttura per scadenza di tassi a pronti e a termine (su base annua)

$$i(0,1) = 5\% \quad , \quad i(0,1,2) = 4\% \quad , \quad i(0,3) = 4\% \quad , \quad i(0,2,4) = 5\%$$

si calcoli tutta la struttura a termine dei tassi a pronti (su base annua) e il tasso a termine $i(0,1,3)$. Successivamente si trovi il prezzo (coerente con la struttura) dell'obbligazione con scadenza 4 anni, che paga cedole annue al tasso cedolare $r = 5\%$ e rimborsa 100 alla scadenza. Si trovi infine la corrispondente duration di questo titolo.

✎

Abbiamo alcuni tassi a pronti e alcuni tassi a termine della struttura. Dobbiamo calcolare quello che resta della struttura dei tassi a pronti, e cioè il tasso a pronti a due anni $i(0,2)$ e il tasso a pronti a quattro anni $i(0,4)$. Il primo è immediato, dato che[8]

$$1 + i_p(0,2) = \big(1 + i(0,1)\big)\big(1 + i(0,1,2)\big), \text{ da cui si ricava } i_p(0,2) = \big(1 + i(0,1)\big)\big(1 + i(0,1,2)\big) - 1 = 0.092.$$

Quest'ultimo è un tasso biennale, dal quale si ricava il tasso annuo

$$i_a(0,2) = \big(1 + i_p(0,2)\big)^{1/2} - 1 = 0.044988038.$$

A questo punto possiamo trovare il tasso a quattro anni usando il tasso a pronti a due anni appena trovato e il tasso a termine tra 2 e 4 anni. Si ha

$$1 + i_p(0,4) = \big(1 + i_p(0,2)\big)\big(1 + i(0,2,4)\big)^2, \text{ da cui si ricava } i_p(0,4) = \big(1 + i_p(0,2)\big)\big(1 + i(0,2,4)\big)^2 - 1 = 0.20393,$$

che è un tasso quadriennale, da cui si ricava il tasso annuo

$$i_a(0,4) = \big(1 + i_p(0,4)\big)^{1/4} - 1 = 0.047491021.$$

Ora il tasso a termine $i(0,1,3)$. Dalla relazione

$$\big(1 + i(0,1)\big)\big(1 + i_p(0,1,3)\big) = 1 + i_p(0,3)$$

si può ricavare il tasso a termine voluto su base biennale

$$i_p(0,1,3) = \frac{1 + i_p(0,3)}{1 + i(0,1)} - 1 = 0.071299047,$$

da cui si trova il tasso su base annua

$$i_a(0,1,3) = \big(1 + i_p(0,3)\big)^{1/2} - 1 = 0.035035771.$$

Ora passiamo alla domanda successiva: il prezzo dell'obbligazione dell'obbligazione con scadenza 4 anni, che paga cedole annue al tasso cedolare $r = 5\%$ e rimborsa 100 alla scadenza. Il prezzo è dato dal valore attualizzato e cumulato degli importi pagati dal titolo.

$$P_0 = 5 \cdot 1,05^{-1} + 5 \cdot 1,04^{-1}1,05^{-1} + 5 \cdot 1,04^{-3} + 105 \cdot 1,05^{-2}1,04^{-1}1,05^{-1} = 101.$$ [9]

Infine la duration di questo stesso titolo. Dalla formula generale della duration

$$D_0 = \frac{1}{P_0}\Big(1 \cdot 5 \cdot (1 + i(0,1))^{-1} + 2 \cdot 5 \cdot (1 + i(0,2))^{-2} + 3 \cdot 5 \cdot (1 + i(0,3))^{-3} + 4 \cdot 105 \cdot (1 + i(0,4))^{-4}\Big) = 3.72$$

[8] Indico con i_p un tasso periodale, cioè su base non annua, e con i_a un tasso su base annua. Quando non scrivo nulla sottintendo una base annua.

[9] Per il calcolo ho usato solo dati originari del problema, con tassi a pronti e a termine. Si poteva anche utilizzare solo la struttura dei tassi a pronti trovata, e cioè

$$P_0 = 5 \cdot (1 + i(0,1))^{-1} + 5 \cdot (1 + i(0,2))^{-2} + 5 \cdot (1 + i(0,3))^{-3} + 105 \cdot (1 + i(0,4))^{-4}.$$

Chiaramente in questa formula i tassi devono essere espressi su base annua.