

Svolgimento dei temi d'esame di MDEF
Anno Accademico 2021/22

Alberto Peretti

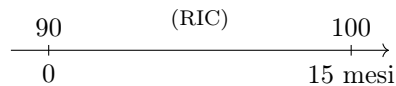
Settembre 2022

PROVA INTERMEDIA di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 12/11/2021

ESERCIZIO 1. Si supponga che nel RIC siano ritenuti equivalenti 90€ in $t = 0$ e 100€ in $t = 15$ mesi. Si determinino i montanti tra 18 mesi, nel RIS e nel RSC, dei 90€.



Il semplice schema che esprime l'equivalenza dei due importi nel tempo (nel RIC) è il seguente:



L'equivalenza tra i due importi nel RIC porta all'equazione del valore

$$100 = 90(1+i)^{15/12}, \text{ da cui si ricava } i = \left(\frac{100}{90}\right)^{12/15} - 1 = 0.087942624.$$

Questo è il tasso di interesse su base annua. Determiniamo ora i montanti tra 18 mesi.

Nel RIS si ha

$$M_{18}^{RIS} = 90 \left(1 + i \cdot \frac{18}{12}\right) = 101.87\text{€}.$$

Per il montante nel RSC dobbiamo trovare intanto il tasso di sconto equivalente:

$$d = \frac{i}{1+i} = 0.08083388.$$

Il montante è allora

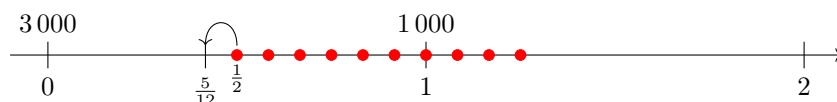
$$M_{18}^{RSC} = \frac{90}{1 - d \cdot \frac{18}{12}} = 102.42\text{€}.$$

ESERCIZIO 2. Un debito di 3000€ contratto oggi al tempo $t = 0$ viene rimborsato con un versamento di 1000€ tra un anno e con 10 rate mensili, la prima delle quali tra 6 mesi. Si ipotizzi un tasso di interesse annuo del 10%. Si scriva l'equazione del valore che consente di determinare la rata mensile. Si determini a quanto deve ammontare la rata mensile.

Supponendo invece, mantenendo le stesse modalità di restituzione precedenti, che la rata mensile sia di 150€, sempre la prima tra 6 mesi, si determini il numero di rate intere necessarie e il residuo (contestuale all'ultima rata) per la completa restituzione del prestito.



Può essere utile rappresentare lo schema dei versamenti.



L'equazione del valore che consente di determinare la rata mensile R è

$$3000 = 1000(1+i)^{-1} + R \cdot a_{\overline{10}|i_{1/12}}(1+i)^{-5/12}.$$

Serve ovviamente il tasso mensile equivalente al tasso annuo del $i = 10\%$. Si ha $i_{1/12} = (1+i)^{1/12} - 1 = 0.00797414$. La rata è quindi

$$R = \frac{3000 - 1000(1+i)^{-1}}{a_{\overline{10}|i_{1/12}}(1+i)^{-5/12}} = 227.22\text{€}.$$

Con una rata di 150€ la restituzione del debito è garantita se si ha

$$1\,000(1+i)^{-1} + 150a_{\overline{m}|i_{1/12}}(1+i)^{-5/12} \geq 3\,000.$$

Questa equivale a

$$a_{\overline{m}|i_{1/12}} \geq \frac{3\,000 - 1\,000(1+i)^{-1}}{150 \cdot (1+i)^{-5/12}} \quad (= A).$$

Indicando appunto con A il termine di destra, la disuguaglianza equivale a sua volta alle seguenti

$$\frac{1 - (1 + i_{1/12})^{-n}}{i_{1/12}} \geq A \quad \Leftrightarrow \quad (1 + i_{1/12})^{-n} \leq 1 - i_{1/12}A$$

e ancora, applicando i logaritmi,

$$-n \ln(1 + i_{1/12}) \leq \ln(1 - i_{1/12}A) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1 - i_{1/12}A)}{\ln(1 + i_{1/12})} = 15.5.$$

Servono 15 rate intere di 150€ più un residuo. Calcoliamo ora il residuo. Valutato all'istante $t = 0$ si ha

$$\text{RES}_{t=0} = 3\,000 - 1\,000(1+i)^{-1} - 150a_{\overline{15}|i_{1/12}}(1+i)^{-5/12} = 60.44\text{€},$$

che, valutati contestualmente all'ultima rata, cioè tra 20 mesi, forniscono

$$\text{RES}_{t=20\text{mesi}} = \text{RES}_{t=0}(1+i)^{20/12} = 70.85\text{€}.$$

ESERCIZIO 3. Una società finanziaria, relativamente ad un bene con prezzo di listino $P = 8\,000\text{€}$, vuole proporre ad un cliente un contratto di leasing di durata 3 anni che prevede un anticipo del 10% del prezzo di listino, un riscatto pari al 5% del prezzo di listino e il versamento di 36 canoni mensili posticipati. La società può avere uno sconto del 5% sull'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto un tasso di interesse annuo del 9%. Si scriva l'equazione del valore per la società di leasing e si determini a quanto deve ammontare il canone da proporre al cliente.

Sapendo che il cliente può acquistare il bene al prezzo di listino, si scriva l'equazione del valore per il cliente. Sapendo infine che il cliente per l'acquisto diretto del bene può avere un prestito dalla sua banca al tasso di interesse annuo del 6%, si dica se egli ragionevolmente sceglierà il prestito bancario o il contratto di leasing.



Le quantità rilevanti nel contratto sono il prezzo di listino $P = 8\,000\text{€}$, l'anticipo $A = P \cdot 0.1 = 800\text{€}$ e il riscatto finale $F = P \cdot 0.05 = 400\text{€}$.

La società finanziaria spende $8\,000 \cdot (1 - 0.05) = 7\,600\text{€}$ per l'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto di leasing un tasso di interesse $i = 9\%$. Serve il tasso di interesse mensile $i_{1/12} = 1.09^{1/12} - 1 = 0.00720732$.

Indicato con R il canone mensile, l'equazione del valore per la società di leasing è

$$7\,600 = 800 + R \cdot a_{\overline{36}|i_{1/12}} + 400(1+i)^{-3}.$$

Da questa si ricava

$$R = \frac{7\,600 - 800 - 400(1+i)^{-3}}{a_{\overline{36}|i_{1/12}}} = 205.36\text{€}.$$

Ora passiamo alla valutazione del cliente, al quale viene proposto un contratto di leasing con le caratteristiche ottenute poco fa (cioè un anticipo di 800€, un riscatto finale di 400€ e un canone di 36 rate trimestrali di 205.36€). Il cliente non ha sconto sul prezzo d'acquisto del bene. Egli è interessato a scoprire qual è il tasso implicito nell'equivalenza finanziaria tra lo spendere oggi 8000€ e distribuire il pagamento nel tempo alle condizioni del contratto.

La sua equazione del valore è quindi

$$8\,000 = 800 + 205.36a_{\overline{36}|i_{1/12}} + 400(1+i)^{-3},$$

con un tasso i questa volta incognito.

La soluzione esatta di questa equazione fornirebbe al cliente un valore preciso da confrontare con il tasso del 6% proposto dalla banca per un prestito di 8000€. Ma la risoluzione esatta (in realtà approssimata) di questa equazione richiederebbe l'uso di approssimazioni successive, eventualmente con il metodo di Newton, e non è richiesta.

Per poter dire quale sarà la scelta ragionevole del cliente tra stipulare il contratto di leasing e chiedere un prestito alla banca al tasso $i^{(B)} = 6\%$ possiamo semplicemente calcolare il valore attuale degli importi relativi al contratto al tasso della banca. Dopo aver calcolato il tasso equivalente mensile $i_{1/12}^{(B)} = 0.00486755$, si trova

$$800 + 205.36a_{\overline{36}|i_{1/12}^{(B)}} + 400(1 + i^{(B)})^{-3} = 7902.14\text{€}.$$

Dato che $7902.14 < 8000$, il tasso della banca sconta maggiormente gli importi rispetto al tasso effettivo incognito e quindi il tasso della banca è maggiore rispetto al tasso del contratto.

Il cliente ragionevolmente sceglierà il contratto di leasing.

ESERCIZIO 4. Per rimborsare in 4 anni un debito di 1 000€, si usa un piano di ammortamento a rate posticipate, tutte comprensive di quota capitale e quota interessi non nulle.

Si costruisca il piano di ammortamento, sapendo che $C_2 = 300$, $R_3 = 200$ e $I_3 = 50$.

Si assuma un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Successivamente si verifichi l'equivalenza finanziaria del piano (uguaglianza tra debito e valore attuale delle rate).



I dati permettono di partire dal prospetto qui a fianco.

Dato che le quote interessi sono posticipate, possiamo ricavare subito la prima quota interessi

$$I_1 = 0.1 \cdot 1\,000 = 100.$$

Non possiamo dire subito quale sia la prima quota capitale, ma possiamo ricavare il debito residuo in $t = 2$ dalla quota interessi I_3 . Infatti, dato che

$$I_3 = i \cdot D_2, \text{ da questa si ricava } D_2 = \frac{I_3}{i} = \frac{50}{0.1} = 500.$$

A questo punto il piano è “sbloccato”. Possiamo in sequenza ricavare le altre quantità.

$$\text{Da } D_2 = D_1 - C_2 \text{ si ricava } D_1 = D_2 + C_2 = 500 + 300 = 800;$$

$$\text{da } D_1 = D_0 - C_1 \text{ si ricava } C_1 = D_0 - D_1 = 1\,000 - 800 = 200;$$

$$I_2 = i \cdot D_1 = 0.1 \cdot 800 = 80;$$

$$\text{da } R_3 = C_3 + I_3 \text{ si ricava } C_3 = R_3 - I_3 = 200 - 50 = 150;$$

$$D_3 = D_2 - C_3 = 500 - 150 = 350;$$

$$I_4 = i \cdot D_3 = 0.1 \cdot 350 = 35 \quad \text{e} \quad C_4 = D_3 = 350.$$

t	$R_k = C_k + I_k$	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	1 000
1	300	200	100	800
2	380	300	80	500
3	200	150	50	350
4	385	350	35	0

La verifica dell'equivalenza finanziaria del piano consiste nel verificare che

$$300 \cdot 1.1^{-1} + 380 \cdot 1.1^{-2} + 200 \cdot 1.1^{-3} + 385 \cdot 1.1^{-4} = 1\,000.$$

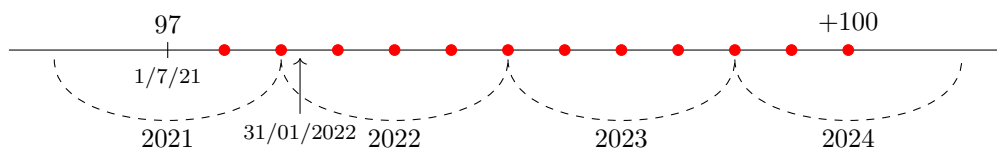
PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 19/01/2022

ESERCIZIO 1. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/07/2021 con le seguenti caratteristiche:

- valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza dopo 3 anni;
- cedole trimestrali con tasso cedolare $r = 4\%$;
- prezzo di emissione $P_E = 97$.

Non si consideri la tassazione. Si dica se il tasso di rendimento a scadenza all'emissione era maggiore o minore del 5%. Utilizzando la duration al tasso del 5%, si dia poi un'approssimazione della variazione del prezzo a seguito di una diminuzione relativa del tasso del 10%.

Si determini infine il prezzo tel quel dell'obbligazione il 31/01/2022 ipotizzando un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 2% (si usi l'anno commerciale).



La cedola trimestrale è $\frac{r}{4}F = \frac{0.04}{4} \cdot 100 = 1$. L'equazione relativa al tasso di rendimento a scadenza all'emissione è

$$97 = 1 \cdot a_{\overline{12}|ym_{1/4}} + 100(1 + ytm)^{-3}.$$

Se calcoliamo il termine di destra ad un tasso del 5% annuo si ottiene il valore $97.48 > 97$. Pertanto il vero tasso di rendimento a scadenza è maggiore del 5%.

Passiamo alla domanda successiva, l'approssimazione della variazione del prezzo attraverso la duration. Per il calcolo della duration usiamo la formula con la increasing annuity (attenzione, le cedole sono 12 e dobbiamo usare il tasso trimestrale).

$$Ia_{\overline{12}|i_{1/4}} = \frac{a_{\overline{12}|i_{1/4}}(1 + i_{1/4}) - 12(1 + i)^{-3}}{i_{1/4}} = 70.51.$$

Ora la formula della duration (attenzione anche qui, ovviamente la duration sarà espressa in trimestri):

$$D_{1/4}(0.05) = \frac{1 \cdot Ia_{\overline{12}|i_{1/4}} + 12 \cdot 100(1 + i)^{-3}}{1 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/4}} + 100(1 + i)^{-3}} = 11.357 \quad (\text{trimestri}).$$

Dobbiamo convertire la duration in anni.

$$D(0.05) = \frac{D_{1/4}}{4} = 2.84.$$

La duration modificata è

$$D_{\text{mod}} = \frac{D(0.05)}{1 + 0.05} = 2.704.$$

Ora il calcolo della variazione del prezzo.

$$\Delta P \simeq -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P_0.$$

Attenzione che abbiamo una diminuzione *relativa* del tasso del 10%, e quindi $\Delta i = -0.05 \cdot 0.1 = -0.005$. Pertanto

$$\Delta P \simeq -2.704 \cdot (-0.005) \cdot 97.48 = +1.32.$$

Veniamo ora all'ultima domanda, il prezzo tel quel dell'obbligazione il 31/01/2022 con un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 2%. Si ha

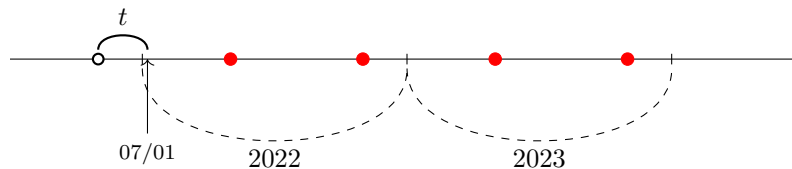
$$P_{\text{tq}} = 1 \cdot a_{\overline{10}|0.02_{1/4}} (1 + 0.02)^{1/12} + 100 (1 + 0.02_{1/4})^{-10+1/3} = 105.076.$$

ESERCIZIO 2. Il B.T.P. denominato Btp-1nv23 9%, con scadenza il 01/11/2023, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 9\%$. Il 07/01/2022 era quotato (corso secco) a 113. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dello 0.5%. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 07/01/2022, di reinvestire le cedole fino alla scadenza al tasso dell'1%. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.



Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1 - \gamma) = \frac{0.09}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 3.9375.$$

Fino alla scadenza del 01/11/2023 il titolo paga $n = 4$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/11/2021) è $t = 30 \cdot 2 + 7 = 67$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 3.9375 \cdot \frac{67}{180} = 1.466.$$

Calcoliamo il prezzo tel quel.

$$P_{\text{tq}} = P_s + \text{rateo} = 113 + 1.466 = 114.466.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 3.9375 \cdot a_{\overline{4}|ytm_{1/2}}(1 + ytm)^{67/360} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-4+67/180}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dello 0.5%. Basta calcolare il termine di destra al tasso dello 0.5% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente): si trova il valore $114.76 > 114.466$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza era maggiore dello 0.5%.

Passiamo ora al calcolo del tasso effettivo in presenza di reinvestimento delle cedole. Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 01/11/2023. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso dell'1%.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-67/360+2}.$$

Ora i montanti degli importi a credito. Non c'è alcun cambio di tasso e quindi il montante delle cedole è

$$M = \text{CED} \cdot a_{\overline{4}|0.01_{1/2}}(1 + 0.01)^2 = 15.868.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-67/360+2} = M + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M + 100}{P_{\text{tq}}} \right)^{1/(-67/360+2)} - 1 = 0.00673688.$$

ESERCIZIO 3. Si considerino i due progetti di investimento

$$A. \quad \begin{array}{cccc} & -10 & 5 & 4 & 3 \\ \hline & | & | & | & | \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad B. \quad \begin{array}{cccc} & -11 & 6 & 5 & 2 \\ \hline & | & | & | & | \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

e la seguente struttura per scadenza dei tassi (a pronti) *su base annua*:

$$i(0, 1) = 0.01 \quad , \quad i(0, 2) = 0.02 \quad , \quad i(0, 3) = 0.03.$$

Si stabilisca quale dei due progetti risulta conveniente in base al criterio del REA/VAN.

Si dica se per entrambi i progetti i flussi consentono di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento. Si dica poi se il valore del TIR per il progetto *A* è maggiore del 10%.

Si dica infine se un investimento (a termine) di 10 tra un anno e incasso di 11 tra 3 anni è coerente con la struttura dei tassi a pronti indicata.



La struttura dei tassi a pronti fornita permette di calcolare direttamente i REA.

$$REA_A = -10 + 5(1 + i(0, 1))^{-1} + 4(1 + i(0, 2))^{-2} + 3(1 + i(0, 3))^{-3} = 1.54$$

e

$$REA_B = -11 + 6(1 + i(0, 1))^{-1} + 5(1 + i(0, 2))^{-2} + 2(1 + i(0, 3))^{-3} = 1.57.$$

Il REA è positivo per entrambi (quindi sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro) e risulta preferibile il progetto *B*.

Sull'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento calcoliamo i flussi cumulati:

$$\text{Progetto } A: \quad -10, -5, -1, +2 \quad \text{e} \quad \text{Progetto } B: \quad -11, -5, 0, +2.$$

Entrambi i flussi cumulati cambiano segno una sola volta e quindi possiamo affermare che il TIR esiste unico per entrambi i progetti.

Con una struttura piatta dei tassi ($i = 10\%$) il REA di *A* è

$$-10 + 5 \cdot 1.1^{-1} + 4 \cdot 1.1^{-2} + 3 \cdot 1.1^{-3} = 0.10 > 0.$$

Quindi il TIR per il progetto *A* è maggiore del 10%.

Veniamo all'ultima domanda: dire se un investimento (a termine) di 10 tra un anno e incasso di 11 tra 3 anni è coerente con la struttura dei tassi a pronti indicata.

Anzitutto un commento. Coerenza dell'operazione significa che i valori che la costituiscono (equivalenza tra 10 in $t = 1$ e 11 in $t = 3$) rispettano la struttura dei tassi, cioè sono in linea con questi. Il modo più semplice, che sfrutta soltanto i tassi a pronti, è verificare se il valore attuale in $t = 0$ di 10 e 11 è lo stesso.

$$10 \cdot (1 + i(0, 1))^{-1} = 9.90 \quad \text{mentre} \quad 11 \cdot (1 + i(0, 3))^{-3} = 10.07$$

e quindi no, l'operazione non è coerente con la struttura dei tassi.

Si poteva alternativamete calcolare il tasso a termine implicitamente definito dalla struttura a pronti e confrontarlo con il tasso a termine ricavato dall'operazione, per vedere se coincidono.

Possiamo arrivare al tasso a termine della struttura attraverso i fattori di sconto. Si ha

$$v(0, 1, 3) = \frac{v(0, 3)}{v(0, 1)} = \frac{\frac{1}{(1+i(0,3))^3}}{\frac{1}{1+i(0,1)}} = \frac{1+i(0,1)}{(1+i(0,3))^3} = 0.9243.$$

Pertanto il tasso a termine (biennale) è

$$i_p(0, 1, 3) = \frac{1}{v(0, 1, 3)} - 1 = 0.0819,$$

mentre dall'operazione risulta un tasso (biennale) pari a

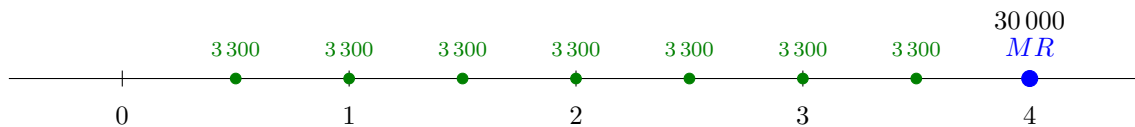
$$\frac{11 - 10}{10} = 0.1.$$

I due tassi sono diversi e quindi non c'è coerenza.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 19/01/2022

ESERCIZIO 1. Si vuole disporre di 30 000€ fra 4 anni. Il progetto iniziale è di versare in un deposito 7 rate semestrali posticipate di 3 300€ e una “maxirata” finale alla fine del 4° anno. Si determini l'ammontare della maxirata finale. Il tasso di interesse annuo da applicare è $i = 5\%$.

Arrivati alla fine del 2° anno non si è in grado di versare la relativa rata. Potendo riprendere i versamenti dopo un semestre, si ricalcoli la rata, in modo da raggiungere l'obiettivo con 4 rate uguali.



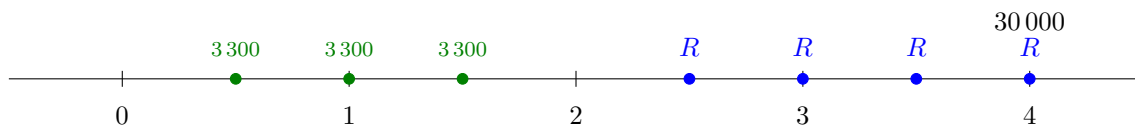
L'equazione che esprime la costituzione del capitale di 30 000€ fra 4 anni mediante 7 rate semestrali posticipate di 3 300€ e una “maxirata” MR finale alla fine del 4° anno è

$$30\,000 = 3\,300 \cdot a_{\overline{7}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05)^4 + MR,$$

da cui si ricava

$$MR = 30\,000 - 3\,300 \cdot a_{\overline{7}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05)^4 = 4\,501.93\text{€}.$$

Ora la situazione cambia dato che, alla fine del secondo anno, dopo aver versato 3 rate, non riesco a versare la quarta e decido di cambiare la modalità successiva per raggiungere l'obiettivo. Riprendo i versamenti dopo un semestre (quindi dopo due anni e mezzo dall'inizio) e voglio chiudere con 4 rate uguali (quindi niente più maxirata finale). Devo ricalcolare la nuova rata R . La nuova situazione può essere rappresentata così.



L'equazione è ora

$$30\,000 = 3\,300 \cdot a_{\overline{3}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05)^4 + R \cdot a_{\overline{4}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05)^2,$$

da cui ricavo

$$R = \frac{30\,000 - 3\,300 \cdot a_{\overline{3}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05)^4}{a_{\overline{4}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05)^2} = 4\,466.13.$$

ESERCIZIO 2. Per rimborsare in 3 anni un debito D_0 di 500€, si usa un piano di ammortamento con quote interessi anticipate e le seguenti caratteristiche:

- una rata R_0 di sola quota interessi
- una rata R_2 di sola quota interessi
- una rata $R_1 = 200\text{€}$ (con quote capitale e interessi)
- una rata R_3 di sola quota capitale.

Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo. Si effettui poi la verifica di equivalenza finanziaria tra quanto versato e il debito iniziale.



Dato che le quote interessi sono anticipate,¹ possiamo ricavare subito la prima quota interessi

$$I_0 = d \cdot 500 = 45.45.$$

¹Vanno calcolate moltiplicando il debito residuo corrente per il tasso di sconto d , equivalente al tasso di interesse del 10%. Si trova $d = \frac{0.1}{1+0.1} = 0.90$.

I dati permettono di partire dal prospetto qui a fianco.

Ora ci sono alcune strade possibili equivalenti. Ne propongo una.

Possiamo impostare il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} C_1 + I_1 = 200 \\ I_1 = d \cdot D_1 \\ D_1 = 500 - C_1. \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda la terza si ha $I_1 = d \cdot (500 - C_1)$ e usando questa nella prima abbiamo

$$C_1 + d \cdot (500 - C_1) = 200, \quad \text{da cui} \quad C_1(1 - d) = 200 - 500d \quad \text{e quindi} \quad C_1 = \frac{200 - 500d}{1 - d} = 170.$$

Si ricava allora immediatamente

$$I_1 = 30, \quad D_1 = 330, \quad D_2 = D_1 = C_3 = 330.$$

Il prospetto complessivo è quindi questo:

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	45.45	0	45.45	500
1	200	170	30	330
2	30	0	30	330
3	330	330	0	0

La verifica dell'equivalenza finanziaria del piano consiste nel verificare che

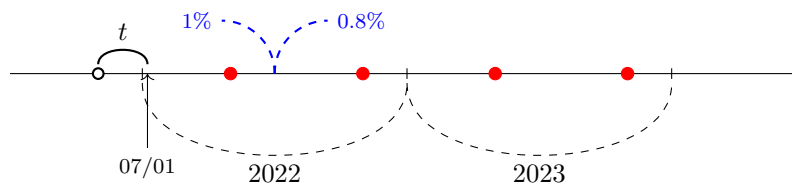
$$45.45 + 200 \cdot 1.1^{-1} + 30 \cdot 1.1^{-2} + 330 \cdot 1.1^{-3} = 500.$$

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. denominato Btp-1nv23 9%, con scadenza il 01/11/2023, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 9\%$. Il 07/01/2022 era quotato (corso secco) a 113. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dello 0.5%. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 07/01/2022 e di reinvestire le cedole versandole in un conto bancario con un tasso dell'1%. Nell'ipotesi che al 30/06/2022 la banca modifichi il tasso portandolo allo 0.8%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.



Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2} F(1 - \gamma) = \frac{0.09}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 3.9375.$$

Fino alla scadenza del 01/11/2023 il titolo paga $n = 4$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/11/2021) è $t = 30 \cdot 2 + 7 = 67$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 3.9375 \cdot \frac{67}{180} = 1.466.$$

Calcoliamo il prezzo tel quel.

$$P_{\text{tq}} = P_s + \text{rateo} = 113 + 1.466 = 114.466.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 3.9375 \cdot a_{\overline{4}|ytm_{1/2}}(1 + ytm)^{67/360} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-4+67/180}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dello 0.5%. Basta calcolare il termine di destra al tasso dello 0.5% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente): si trova il valore $114.76 > 114.466$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza era maggiore dello 0.5%.

Passiamo ora al calcolo del tasso effettivo in presenza di reinvestimento delle cedole. Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 01/11/2023. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso dell'1%.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-67/360+2}.$$

Ora i montanti degli importi a credito. A causa del cambio di tasso al 30/06/2022 dobbiamo considerare che una cedola va valutata usando entrambi i tassi, mentre le altre tre vanno valutate solo con il secondo tasso.

Il montante della prima cedola è

$$M_1 = \text{CED} \cdot (1 + 0.01)^{2/12}(1 + 0.008)^{1+4/12} = 3.9862$$

e il montante delle altre è

$$M_2 = \text{CED} \cdot a_{\overline{3}|0.008_{1/2}}(1 + 0.008_{1/2})^3 = 11.860.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-67/360+2} = M_1 + M_2 + 100$$

e si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{P_{\text{tq}}} \right)^{1/(-67/360+2)} - 1 = 0.00663.$$

ESERCIZIO 4. Si considerino i due progetti di investimento

$$A. \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & -10 & 5 & 4 & 3 \\ \hline & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad B. \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & -11 & 6 & 5 & 2 \\ \hline & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

e la seguente struttura per scadenza dei tassi (a pronti) *su base annua*:

$$i(0, 1) = 0.01 \quad , \quad i(0, 2) = 0.02 \quad , \quad i(0, 3) = 0.03.$$

Si stabilisca quale dei due progetti risulta conveniente in base al criterio del REA/VAN.

Si dica se per entrambi i progetti i flussi consentono di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento. Si dica poi se il valore del TIR per il progetto *A* è maggiore del 10%.

Si dica infine se un investimento (a termine) di 10 tra un anno e incasso di 11 tra 3 anni è coerente con la struttura dei tassi a pronti indicata.



La struttura dei tassi a pronti fornita permette di calcolare direttamente i REA.

$$\text{REA}_A = -10 + 5(1 + i(0, 1))^{-1} + 4(1 + i(0, 2))^{-2} + 3(1 + i(0, 3))^{-3} = 1.54$$

e

$$\text{REA}_B = -11 + 6(1 + i(0, 1))^{-1} + 5(1 + i(0, 2))^{-2} + 2(1 + i(0, 3))^{-3} = 1.57.$$

Il REA è positivo per entrambi (quindi sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro) e risulta preferibile il progetto *B*.

Sull'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento calcoliamo i flussi cumulati:

$$\text{Progetto A: } -10, -5, -1, +2 \quad \text{e} \quad \text{Progetto B: } -11, -5, 0, +2.$$

Entrambi i flussi cumulati cambiano segno una sola volta e quindi possiamo affermare che il TIR esiste unico per entrambi i progetti.

Con una struttura piatta dei tassi ($i = 10\%$) il REA di A è

$$-10 + 5 \cdot 1.1^{-1} + 4 \cdot 1.1^{-2} + 3 \cdot 1.1^{-3} = 0.10 > 0.$$

Quindi il TIR per il progetto A è maggiore del 10%.

Veniamo all'ultima domanda: dire se un investimento (a termine) di 10 tra un anno e incasso di 11 tra 3 anni è coerente con la struttura dei tassi a pronti indicata.

Anzitutto un commento. Coerenza dell'operazione significa che i valori che la costituiscono (equivalenza tra 10 in $t = 1$ e 11 in $t = 3$) rispettano la struttura dei tassi, cioè sono in linea con questi. Il modo più semplice, che sfrutta soltanto i tassi a pronti è verificare se il valore attuale in $t = 0$ di 10 e 11 è lo stesso.

$$10 \cdot (1 + i(0, 1))^{-1} = 9.90 \quad \text{mentre} \quad 11 \cdot (1 + i(0, 3))^{-3} = 10.07$$

e quindi no, l'operazione non è coerente con la struttura dei tassi.

Si poteva alternativamete calcolare il tasso a termine implicitamente definito dalla struttura a pronti e confrontarlo con il tasso a termine ricavato dall'operazione, per vedere se coincidono.

Possiamo arrivare al tasso a termine della struttura attraverso i fattori di sconto. Si ha

$$v(0, 1, 3) = \frac{v(0, 3)}{v(0, 1)} = \frac{1 + i(0, 1)}{(1 + i(0, 3))^3} = 0.9243.$$

Pertanto il tasso a termine (biennale) è

$$i_p(0, 1, 3) = \frac{1}{v(0, 1, 3)} - 1 = 0.0819,$$

mentre dall'operazione risulta un tasso (biennale) pari a

$$\frac{11 - 10}{10} = 0.1.$$

I due tassi sono diversi e quindi non c'è coerenza.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 03/02/2022

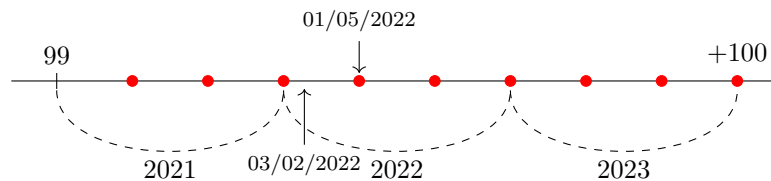
ESERCIZIO 1. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/01/2021 con le seguenti caratteristiche:

- valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza dopo 3 anni;
- cedole quadrimestrali con tasso cedolare $r = 2.70\%$;
- prezzo di emissione $P_E = 99$.

Non si consideri la tassazione. Si dia una stima del tasso annuo di rendimento a scadenza all'emissione e si dica se questa è per eccesso o per difetto.

Sapendo poi che al 03/02/2022 il tasso di rendimento a scadenza è dell'1%, si determini il prezzo tel quel in questa data (si usi l'anno commerciale).

Utilizzando la duration al tasso dell'1%, si dia poi un'approssimazione della variazione del prezzo a seguito di un aumento relativo del tasso del 10% alla data del 01/05/2022 (subito dopo l'incasso della cedola).



La cedola quadrimestrale è $\frac{r}{3}F = \frac{0.027}{3} \cdot 100 = 0.9$. Ci sono 9 cedole.

L'equazione relativa al tasso di rendimento a scadenza all'emissione è

$$99 = 0.9 \cdot a_{\overline{9}|ytm_{1/3}} + 100(1 + ytm_{1/3})^{-9}. \quad (1)$$

Per trovare una stima del tasso di rendimento a scadenza all'emissione usiamo la formula studiata.

$$ytm'_0 = \frac{0.9 + \frac{100-99}{9}}{\frac{100+2 \cdot 99}{3}} = 0.01017897 \quad (\text{quadrimestrale}).$$

Il tasso annuo è $ytm_0 = (1 + ytm'_0)^3 - 1 = 0.0308488$.

Ora calcoliamo il termine di destra dell'equazione (1) con il tasso ytm_0 :

$$P(ytm_0) = 0.9 \cdot a_{\overline{9}|ytm'_0} + 100(1 + ytm'_0)^{-9} = 98.998 < 99.$$

La stima è quindi per eccesso.

Seconda domanda. Al 03/02/2022 il tasso di rendimento a scadenza è dell'1%. Le cedole da conteggiare sono ora 6 e occorre considerare che dall'ultima cedola (01/01/2022) passano 33 giorni. Il prezzo tel quel è

$$P_{tq} = 0.9 \cdot a_{\overline{6}|0.01_{1/3}}(1 + 0.01)^{33/360} + 100(1 + 0.01_{1/3})^{-6+33/120} = 103.46.$$

Ultima domanda, l'approssimazione della variazione del prezzo attraverso la duration. Dobbiamo porci alla data del 01/05/2022, data in cui abbiamo appena incassato una cedola. Le restanti cedole da considerare ora sono 5.

Per il calcolo della duration usiamo la formula con la increasing annuity (5 cedole e tasso quadrimestrale).

$$Ia_{\overline{5}|0.01_{1/3}} = a_{\overline{5}|0.01_{1/3}} + \frac{a_{\overline{5}|0.01_{1/3}} - 5(1 + 0.01_{1/3})^{-5}}{0.01_{1/3}} = 14.8188.$$

Ora la formula della duration (ovviamente la duration sarà espressa in quadrimestri):²

$$D_{1/3}(0.01) = \frac{0.9 \cdot Ia_{\overline{5}|0.01_{1/3}} + 5 \cdot 100(1 + 0.01_{1/3})^{-5}}{0.9 \cdot a_{\overline{5}|0.01_{1/3}} + 100(1 + 0.01_{1/3})^{-5}} = 4.913 \quad (\text{quadrimestri}).$$

La duration in anni è quindi

$$D(0.01) = \frac{D_{1/3}(0.01)}{3} = 1.638.$$

La duration modificata è

$$D_{\text{mod}} = \frac{D(0.01)}{1 + 0.01} = 1.621.$$

Ora il calcolo della variazione del prezzo.

$$\Delta P \simeq -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P_0.$$

Abbiamo un aumento *relativo* del tasso del 10%, e quindi $\Delta i = -0.01 \cdot 0.1 = -0.001$. Pertanto

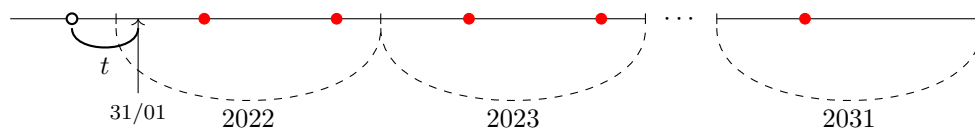
$$\Delta P \simeq -1.621 \cdot (-0.001) \cdot 102.81 = -0.167.$$

ESERCIZIO 2. Il B.T.P. denominato Btp-1mg31 6%, con scadenza il 01/05/2031, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 6\%$. Il 31/01/2022 era quotato (corso secco) a 142.70. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era positivo o negativo. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale.)

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 31/01/2022, di reinvestire le cedole fino alla scadenza al tasso dell'1%. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.



Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1 - \gamma) = \frac{0.06}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 2.625.$$

Fino alla scadenza del 01/05/2031 il titolo paga $n = 19$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/11/2021) è $t = 30 \cdot 3 = 90$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 2.625 \cdot \frac{90}{180} = 1.3125$$

e il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\text{tq}} = P_s + \text{rateo} = 142.70 + 1.3125 = 144.0125.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 2.625 \cdot a_{\overline{19}|ytm_{1/2}}(1 + ytm)^{90/360} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-19+90/180}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza era positivo o negativo.

²Attenzione che il prezzo va ricalcolato, dato che la data è cambiata rispetto alla situazione considerata prima. Il nuovo prezzo (il denominatore della duration) è

$$P = 0.9 \cdot a_{\overline{5}|0.01_{1/3}} + 100(1 + 0.01_{1/3})^{-5} = 102.81.$$

Basta calcolare il termine di destra al tasso zero: attenzione che non possiamo usare la formula di “a figurato”.³ Si ha

$$2.625 \cdot 19 + 100 = 149.875 > 144.0125.$$

Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza era positivo.

Passiamo ora al calcolo del tasso effettivo in presenza di reinvestimento delle cedole. Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 01/05/2031. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso dell'1%.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua e con M il montante delle cedole, l'equazione da considerare è

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-90/360+19/2} = M + 100.$$

Troviamo M .

$$M = 2.625 \cdot a_{\overline{19}|0.01_{1/2}}(1 + 0.01_{1/2})^{19} = 52.178.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-90/360+19/2} = 152.178$$

da cui si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{152.178}{144.0125} \right)^{1/(-90/360+19/2)} - 1 = 0.00598.$$

ESERCIZIO 3. Si considerino i due progetti di investimento

$$A. \quad \begin{array}{cccc} -10 & 4 & -2 & 9 \\ | & | & | & | \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad B. \quad \begin{array}{cccc} -8 & 2 & -5 & 12 \\ | & | & | & | \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

e la seguente struttura per scadenza dei tassi *su base annua*:

$$i(0, 1) = 0.03 \quad , \quad i(0, 2) = 0.02 \quad , \quad i(0, 2, 3) = 0.01.$$

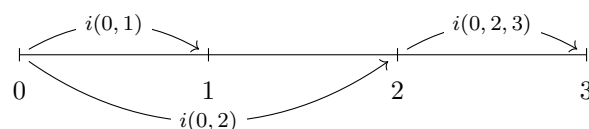
Dopo aver calcolato i fattori di sconto $v(0, 1)$, $v(0, 2)$ e $v(0, 3)$, attraverso questi si calcolino i REA/VAN dei due progetti e si stabilisca quale dei due progetti risulta conveniente.

Si dica se per entrambi i progetti i flussi consentono di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento. Si dica poi se il valore del TIR per il progetto A è maggiore del 4%.

Si dica infine, relativamente ad un investimento (a termine) di 100 tra un anno e incasso X tra 3 anni, qual è il valore di X coerente con la struttura dei tassi indicata.



La rappresentazione qui sotto raffigura la struttura dei tassi fornita.



È richiesto esplicitamente di calcolare i REA attraverso i fattori di sconto.⁴

I fattori di sconto sono

$$v(0, 1) = \frac{1}{1 + i(0, 1)} = 0.97087 \quad , \quad v(0, 2) = \frac{1}{(1 + i(0, 2))^2} = 0.96117^5 \quad \text{e}$$

³Dobbiamo usare il significato originario di “a figurato”, cioè il valore attuale di una rendita unitaria posticipata. Se il tasso è nullo, il valore attuale complessivo delle rate è il numero di queste, cioè n . Nel nostro caso 19.

⁴Faccio notare che senza questa richiesta il REA si poteva ottenere con

$$\text{REA} = V_0 + V_1(1 + i(0, 1))^{-1} + V_2(1 + i(0, 2))^{-2} + V_3(1 + i(0, 2, 3))^{-1}(1 + i(0, 1))^{-2}.$$

$$v(0, 3) = \frac{1}{1 + i(0, 2, 3)} \cdot v(0, 2) = 0.95165.$$

Calcoliamo allora i REA.

$$\text{REA}_A = -10 + 4 \cdot v(0, 1) - 5 \cdot v(0, 2) + 9 \cdot v(0, 3) = 0.52$$

e

$$\text{REA}_B = -8 + 2 \cdot v(0, 1) - 5 \cdot v(0, 2) + 12 \cdot v(0, 3) = 0.55.$$

Il REA è positivo per entrambi (quindi sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro) e risulta preferibile il progetto B .

Sull'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento calcoliamo i flussi cumulati:

$$\text{Progetto } A: -10, -6, -8, +1 \quad \text{e} \quad \text{Progetto } B: -8, -6, -11, +1.$$

Entrambi i flussi cumulati cambiano segno una sola volta e quindi possiamo affermare che il TIR esiste unico per entrambi i progetti. Con una struttura piatta dei tassi ($i = 4\%$) il REA di A è

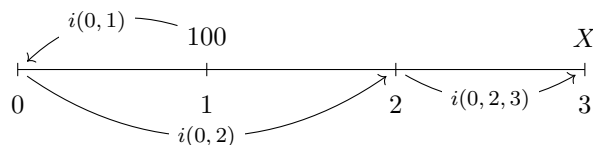
$$-10 + 4 \cdot 1.04^{-1} - 2 \cdot 1.04^{-2} + 9 \cdot 1.04^{-3} = -0.002 < 0.$$

Quindi il TIR per il progetto A è minore del 4%.

Veniamo all'ultima domanda: investimento (a termine) di 100 tra un anno e incasso X tra 3 anni coerente con la struttura dei tassi. Possiamo trovare X usando i tre tassi forniti nei dati del problema. Si ha

$$X = 100(1 + i(0, 1))^{-1}(1 + i(0, 2))^2(1 + i(0, 2, 3)) = 1.03^{-1} \cdot 1.02^2 \cdot 1.01 = 102.02.$$

La raffigurazione qui sotto illustra il calcolo effettuato.



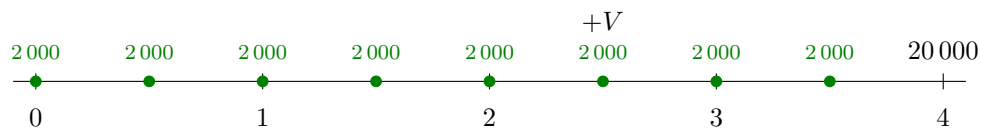
⁵Dato che i tassi di interesse sono espressi su base annua, dobbiamo elevare al quadrato a denominatore, che equivale ad esprimere il tasso su base periodale. In altri termini, applicando la conversione "tasso – fattore" con la formula $v = \frac{1}{1+i}$, dobbiamo avere il tasso periodale, e cioè $i_p(0, 2) = (1 + i_a(0, 2))^2 - 1$, da cui

$$v(0, 2) = \frac{1}{1 + i_p(0, 2)} = \frac{1}{1 + (1 + i_a(0, 2))^2 - 1} = \frac{1}{(1 + i_a(0, 2))^2}.$$

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 03/02/2022

ESERCIZIO 1. Si versano in un deposito, per 4 anni, rate semestrali *anticipate* di 2000€, con l'obiettivo di costituire alla scadenza un capitale di almeno 20 000€. Si dica anzitutto se l'obiettivo può essere raggiunto oppure no. Nel secondo caso si dica quale deve essere il minimo versamento aggiuntivo, da effettuare dopo due anni e mezzo, per raggiungere l'obiettivo. Il tasso di interesse sul deposito è del 4%.

Stesse domande nell'ipotesi che, dopo due anni, il tasso passi dal 4% al 5%.



Il montante dei versamenti delle 8 rate anticipate⁶ alla fine del quarto anno è

$$M = 2000 \cdot a_{\overline{8}|0.04_{1/2}} (1 + 0.04_{1/2})(1 + 0.04)^4 = 17\,493.77\text{€} < 20\,000\text{€},$$

quindi le 8 rate di 2000€ non sono sufficienti per raggiungere l'obiettivo.

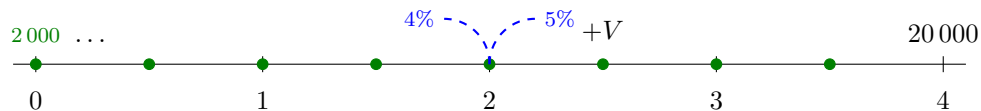
Il minimo versamento aggiuntivo, da effettuare dopo due anni e mezzo, per costituire il capitale di 20 000€ è

$$V = (20\,000 - 17\,493.77)(1 + 0.04_{1/2})^{-3} = 2\,363.04\text{€}.$$

Oppure si poteva calcolare V come soluzione dell'equazione

$$2000 \cdot a_{\overline{8}|0.04_{1/2}} (1 + 0.04_{1/2})(1 + 0.04)^4 + V(1 + 0.04_{1/2})^3 = 20\,000.$$

Ora passiamo alla situazione con il cambio di tasso, rappresentata qui sotto.



Il montante dei versamenti delle rate è ora

$$M' = 2000 \cdot a_{\overline{4}|0.04_{1/2}} (1 + 0.04_{1/2})^5 (1 + 0.05)^2 + 2000 \cdot a_{\overline{4}|0.05_{1/2}} (1 + 0.05_{1/2})^5 = 17\,771.66\text{€}.$$

Quindi il minimo versamento aggiuntivo, con la stessa tempistica precedente, è

$$V = (20\,000 - 17\,771.66)(1 + 0.05_{1/2})^{-3} = 2\,071.08\text{€}.$$

ESERCIZIO 2. Per rimborsare in 3 anni un debito D_0 di 1000€, si usa un piano di ammortamento con quote interessi posticipate e le seguenti caratteristiche:

- una quota interessi $I_2 = 50\text{€}$
- una rata $R_3 = 330\text{€}$

Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo. Si effettui poi la verifica di equivalenza finanziaria tra quanto versato e il debito iniziale.



I dati permettono di partire dal prospetto all'inizio della pagina che segue.

Le quantità che possiamo calcolare direttamente in base ai dati sono:

$$I_1 = i \cdot D_0 = 0.1 \cdot 1\,000 = 100 \quad , \quad D_1 = \frac{I_2}{i} = \frac{50}{0.1} = 500 \quad \text{e}$$

$$C_1 = D_0 - D_1 = 1\,000 - 500 = 500.$$

⁶Attenzione, rate anticipate vuol dire pagate all'inizio del periodo, quindi nell'ultimo periodo c'è un'ultima rata all'inizio del semestre e non alla fine: quindi non sono 9 rate!

t	R_t	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	1 000
1	R_1	C_1	I_1	D_1
2	R_2	C_2	50	D_2
3	330	C_3	I_3	0

Propongo ora due modi diversi di completare il piano. Il primo è scrivere il sistema

$$\begin{cases} C_3 + I_3 = 330 \\ D_2 = C_3 \\ I_3 = 0.1 \cdot D_2. \end{cases}$$

Usando le ultime due equazioni si ha che $I_3 = 0.1 \cdot C_3$ e sostituendo questa nella prima si ha

$$C_3 + 0.1 \cdot C_3 = 330, \quad \text{da cui} \quad C_3 = \frac{330}{1.1} = 300.$$

Questo permette di ricavare $I_3 = 30$ e $C_2 = 200$ e a seguire le rate.

L'altro modo è operare sulle rate e usare l'equivalenza finanziaria tra le rate e il debito iniziale.

Da $I_1 = 100$ e $C_1 = 500$ si ricava $R_1 = 600$. Ora possiamo trovare R_2 , la rata mancante, dall'equazione

$$600 \cdot 1.1^{-1} + R_2 \cdot 1.1^{-2} + 330 \cdot 1.1^{-3} = 1000,$$

da cui

$$R_2 = \frac{1000 - 600 \cdot 1.1^{-1} - 330 \cdot 1.1^{-3}}{1.1^{-2}} = 250.$$

Da questa si ricava $C_2 = 250 - 50 = 200$, $D_2 = 500 - 200 = 300$, $C_3 = 300$ e $I_3 = 30$.

Il prospetto complessivo è quindi questo:

t	R_t	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	1 000
1	600	500	100	500
2	250	200	50	300
3	330	300	30	0

La verifica dell'equivalenza finanziaria del piano (non necessaria se si è seguita la seconda strada) consiste nel verificare che

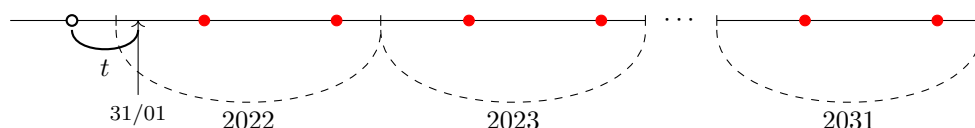
$$600 \cdot 1.1^{-1} + 250 \cdot 1.1^{-2} + 330 \cdot 1.1^{-3} = 1000.$$

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. denominato Btp-1mg31 6%, con scadenza il 01/05/2031, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 6\%$. Il 31/01/2022 era quotato (corso secco) a 142.70. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era positivo o negativo. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale.)

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 31/01/2022, di reinvestire le cedole fino alla scadenza al tasso dell'1%. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.



Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1-\gamma) = \frac{0.06}{2} \cdot 100(1-0.125) = 2.625.$$

Fino alla scadenza del 01/05/2031 il titolo paga $n = 19$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/11/2021) è $t = 30 \cdot 3 = 90$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 2.625 \cdot \frac{90}{180} = 1.3125$$

e il prezzo tel quel è quindi

$$P_{\text{tq}} = P_s + \text{rateo} = 142.70 + 1.3125 = 144.0125.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 2.625 \cdot a_{\overline{19}|ytm_{1/2}} (1 + ytm)^{90/360} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-19+90/180}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza era positivo o negativo.

Basta calcolare il termine di destra al tasso zero: attenzione che non possiamo usare la formula di "a figurato".⁷ Si ha

$$2.625 \cdot 19 + 100 = 149.875 > 144.0125.$$

Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza era positivo.

Passiamo ora al calcolo del tasso effettivo in presenza di reinvestimento delle cedole. Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 01/05/2031. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso dell'1%.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua e con M il montante delle cedole, l'equazione da considerare è

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-90/360+19/2} = M + 100.$$

Troviamo M .

$$M = 2.625 \cdot a_{\overline{19}|0.01_{1/2}} (1 + 0.01_{1/2})^{19} = 52.178.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-90/360+19/2} = 152.178$$

da cui si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{152.178}{142.70} \right)^{1/(-90/360+19/2)} - 1 = 0.00598.$$

ESERCIZIO 4. Si considerino i due progetti di investimento

$$\begin{array}{c} A. \quad \begin{array}{cccc} -10 & 4 & -2 & 9 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} B. \quad \begin{array}{cccc} -8 & 2 & -5 & 12 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \end{array}$$

e la seguente struttura per scadenza dei tassi *su base annua*:

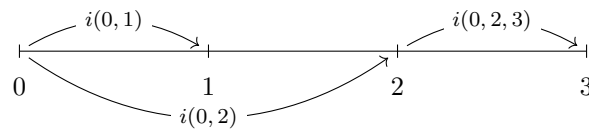
$$i(0, 1) = 0.03 \quad , \quad i(0, 2) = 0.02 \quad , \quad i(0, 2, 3) = 0.01.$$

Dopo aver calcolato i fattori di sconto $v(0, 1)$, $v(0, 2)$ e $v(0, 3)$, attraverso questi si calcolino i REA/VAN dei due progetti e si stabilisca quale dei due progetti risulta conveniente.

Si dica se per entrambi i progetti i flussi consentono di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento. Si dica poi se il valore del TIR per il progetto A è maggiore del 4%.

Si dica infine, relativamente ad un investimento (a termine) di 100 tra un anno e incasso X tra 3 anni, qual è il valore di X coerente con la struttura dei tassi indicata.





La rappresentazione qui sopra raffigura la struttura dei tassi fornita.

È richiesto esplicitamente di calcolare i REA attraverso i fattori di sconto.⁸

I fattori di sconto sono

$$v(0, 1) = \frac{1}{1 + i(0, 1)} = 0.97087 \quad , \quad v(0, 2) = \frac{1}{(1 + i(0, 2))^2} = 0.96117^9 \quad e$$

$$v(0, 3) = \frac{1}{1 + i(0, 2, 3)} \cdot v(0, 2) = 0.95165.$$

Calcoliamo allora i REA.

$$REA_A = -10 + 4 \cdot v(0, 1) - 5 \cdot v(0, 2) + 9 \cdot v(0, 3) = 0.52$$

e

$$REA_B = -8 + 2 \cdot v(0, 1) - 5 \cdot v(0, 2) + 12 \cdot v(0, 3) = 0.55.$$

Il REA è positivo per entrambi (quindi sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro) e risulta preferibile il progetto B .

Sull'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento calcoliamo i flussi cumulati:

$$\text{Progetto A: } -10, -6, -8, +1 \quad e \quad \text{Progetto B: } -8, -6, -11, +1.$$

Entrambi i flussi cumulati cambiano segno una sola volta e quindi possiamo affermare che il TIR esiste unico per entrambi i progetti. Con una struttura piatta dei tassi ($i = 4\%$) il REA di A è

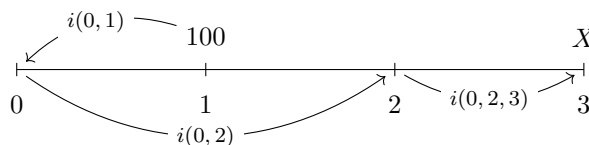
$$-10 + 4 \cdot 1.04^{-1} - 2 \cdot 1.04^{-2} + 9 \cdot 1.04^{-3} = -0.002 < 0.$$

Quindi il TIR per il progetto A è minore del 4%.

Veniamo all'ultima domanda: investimento (a termine) di 100 tra un anno e incasso X tra 3 anni coerente con la struttura dei tassi. Possiamo trovare X usando i tre tassi forniti nei dati del problema. Si ha

$$X = 100(1 + i(0, 1))^{-1}(1 + i(0, 2))^2(1 + i(0, 2, 3)) = 1.03^{-1} \cdot 1.02^2 \cdot 1.01 = 102.02.$$

La raffigurazione qui sotto illustra il calcolo effettuato.



⁷Dobbiamo usare il significato originario di "a figurato", cioè il valore attuale di una rendita unitaria posticipata. Se il tasso è nullo, il valore attuale complessivo delle rate è il numero di queste, cioè n . Nel nostro caso 19.

⁸Faccio notare che senza questa richiesta il REA si poteva ottenere con

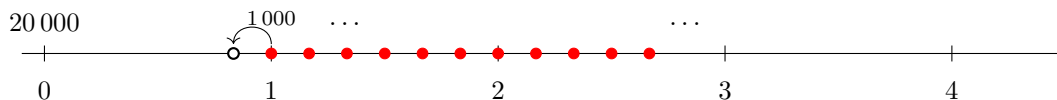
$$REA = V_0 + V_1(1 + i(0, 1))^{-1} + V_2(1 + i(0, 2))^{-2} + V_3(1 + i(0, 2, 3))^{-1}(1 + i(0, 1))^{-2}.$$

⁹Dato che i tassi di interesse sono espressi su base annua, dobbiamo elevare al quadrato a denominatore, che equivale ad esprimere il tasso su base periodale. In altri termini, applicando la conversione "tasso - fattore" con la formula $v = \frac{1}{1+i}$, dobbiamo avere il tasso periodale, e cioè $i_p(0, 2) = (1 + i_a(0, 2))^2 - 1$, da cui

$$v(0, 2) = \frac{1}{1 + i_p(0, 2)} = \frac{1}{1 + (1 + i_a(0, 2))^2 - 1} = \frac{1}{(1 + i_a(0, 2))^2}.$$

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 27/06/2022

ESERCIZIO 1. Con quante rate bimestrali di 1000€, la prima delle quali tra un anno, si può restituire un prestito di 20000€ al tasso del 6%? Si calcoli il numero di rate intere e il residuo da versare contestualmente all'ultima rata. Qual è il debito residuo subito dopo aver versato la 13^a rata? Volendo a quel punto estinguere il debito con un solo versamento dopo un anno, determinare tale importo.



Serve il tasso bimestrale. Poniamo $i = 0.06$, da cui $i_{1/6} = (1 + i)^{1/6} - 1 = 0.009758794$.

Per determinare il numero n di rate bimestrali la disequazione da impostare è

$$1000 a_{\overline{n}|i_{1/6}} (1 + i_{1/6})^{-5} \geq 20000.$$

Questa equivale a

$$\frac{1 - (1 + i_{1/6})^{-n}}{i_{1/6}} \geq \frac{20000}{1000} (1 + i_{1/6})^5 \quad (= A)$$

Indicando appunto con A il termine di destra, la disuguaglianza equivale a sua volta alle seguenti

$$1 - (1 + i_{1/6})^{-n} \geq i_{1/6} A \quad \Leftrightarrow \quad (1 + i_{1/6})^{-n} \leq 1 - i_{1/6} A$$

e ancora, applicando i logaritmi,

$$-n \ln(1 + i_{1/6}) \leq \ln(1 - i_{1/6} A) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1 - i_{1/6} A)}{\ln(1 + i_{1/6})} = 23.61.$$

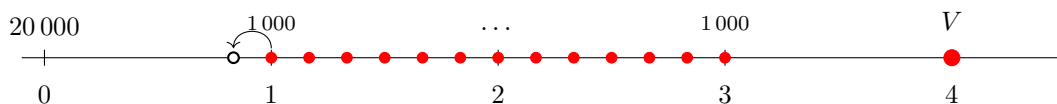
Servono quindi 23 rate intere di 1000€ più un residuo. Calcoliamo ora il residuo. Valutato all'istante $t = 0$ è

$$\text{RES}_{t=0} = 20000 - 1000 a_{\overline{23}|i_{1/6}} (1 + i_{1/6})^{-5} = 459.82\text{€},$$

che, valutati contestualmente all'ultima rata, cioè dopo $5 + 23 = 28$ bimestri (4 anni e 8 mesi), forniscono

$$\text{RES}_{t=28\text{bimestri}} = \text{RES}_{t=0} (1 + i_{1/6})^{28} = 603.50\text{€}.$$

Determiniamo ora il debito residuo subito dopo aver versato la 13^a rata. Anzitutto possiamo osservare che questa cade dopo $5 + 13 = 18$ bimestri, cioè alla fine del 3^o anno.



Propongo due modi per il calcolo del debito residuo.

Procedendo analogamente a quanto fatto poco fa per il calcolo del residuo, il debito residuo dopo 13 rate, valutato all'istante iniziale, è

$$D_{13}^0 = 20000 - 1000 a_{\overline{13}|i_{1/6}} (1 + i_{1/6})^{-5} = 8422.41\text{€}$$

che, portati al 3^o anno, sono

$$D_{13} = D_{13}^0 \cdot (1 + i)^3 = 10031.22\text{€}.$$

Il secondo modo è ottenere direttamente il debito residuo come valore delle rate ancora da versare (dopo aver versato la 13^a) alla fine del 3^o anno. Attenzione che dobbiamo considerare anche il residuo. Si ha

$$D_{13} = 1000 a_{\overline{10}|i_{1/6}} + \text{RES} \cdot (1 + i_{1/6})^{-10} = 10031.22\text{€}.$$

Ultima domanda: siamo alla fine del 3° anno, abbiamo versato 13 rate e vogliamo estinguere il debito con un solo versamento (chiamiamolo V) tra un anno. Quello che resta da versare è quanto calcolato al punto precedente, ma lo dobbiamo “portare avanti” di un anno, quindi basta fare

$$V = D_{13} \cdot (1 + i) = 10\,633.09\text{€}.$$

ESERCIZIO 2. Per rimborsare in 4 anni un debito D_0 di 1000€ si usa un piano di ammortamento con rate posticipate (in progressione geometrica) che aumentano ogni anno del 20%.

Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo dell'8%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.



Con rate posticipate in progressione geometrica il valore attuale è dato dalla formula

$$V_0 = R_1 v \frac{1 - (qv)^n}{1 - qv} \quad \text{se } qv \neq 1,$$

dove R_1 è la prima delle rate in progressione, q è la ragione della progressione (cioè il rapporto tra una rata e la precedente) e v è il fattore di sconto. Si osservi che nel nostro caso

$$q = 1.2 \quad \text{e} \quad v = \frac{1}{1 + i} = \frac{1}{1 + 0.08} = 0.925925926 \quad \text{e pertanto} \quad qv \neq 1.$$

(Per dire che $qv \neq 1$ bastava semplicemente osservare che la rata aumenta del 20%, mentre il tasso è dell'8%.)

Possiamo determinare subito il valore della rata iniziale (e quindi anche tutte le altre). L'equazione è

$$R_1 v \frac{1 - (qv)^n}{1 - qv} = 1\,000$$

da cui

$$R_1 = \frac{1\,000}{v} \cdot \frac{1 - qv}{1 - (qv)^n} = 228.94\text{€}.$$

Considerando che la quota interessi è sempre data dal debito residuo precedente moltiplicato per il tasso, possiamo in sequenza, per ogni scadenza, determinare la quota interessi, la quota capitale e il nuovo debito residuo. Si ottiene quanto segue:

$$I_1 = D_0 \cdot i = 1\,000 \cdot 0.08 = 80 \quad , \quad C_1 = R_1 - I_1 = 228.94 - 80 = 148.94 \quad , \quad D_1 = D_0 - C_1 = 1\,000 - 148.94 = 851.06$$

e quindi

$$I_2 = D_1 \cdot i = 68.08 \quad , \quad R_2 = qR_1 = 274.73 \quad , \quad C_2 = R_2 - I_2 = 206.64 \quad , \quad D_2 = D_1 - C_2 = 644.42$$

e quindi

$$I_3 = D_2 \cdot i = 51.55 \quad , \quad R_3 = qR_2 = 329.67 \quad , \quad C_3 = R_3 - I_3 = 278.12 \quad , \quad D_3 = D_2 - C_3 = 366.30$$

e infine

$$I_4 = D_3 \cdot i = 29.30 \quad , \quad R_4 = qR_3 = 395.61 \quad , \quad C_4 = R_4 - I_4 = 366.30 \quad , \quad D_4 = D_3 - C_4 = 0$$

Il prospetto riassuntivo è quindi questo:

t	R_t	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	1 000
1	228.94	148.94	80	851.06
2	274.73	206.64	68.08	644.42
3	329.67	278.12	51.55	366.30
4	395.61	366.30	29.30	0

ESERCIZIO 3. Si consideri un'obbligazione emessa con le seguenti caratteristiche:

- valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza dopo 4 anni;
- cedole semestrali con tasso cedolare $r = 6\%$.

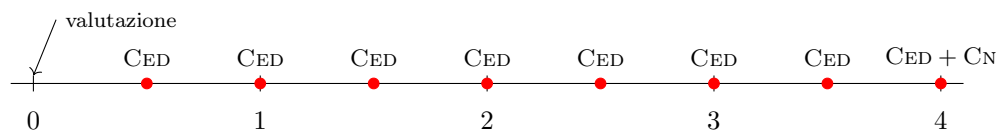
Si consideri la tassazione. Nell'ipotesi che all'emissione il tasso di rendimento a scadenza sia il 5%, si dica se è corretto affermare che il prezzo di emissione è sopra la pari.

Si consideri poi la situazione dopo un anno, subito dopo l'incasso della 2^a cedola, nell'ipotesi che il tasso di rendimento a scadenza sia salito al 6%. Si determini la duration del titolo in quel momento.

Infine, utilizzando la duration, si dia un'approssimazione della variazione del prezzo a seguito di una diminuzione relativa del tasso del 10%.



Poniamoci all'emissione ($t = 0$) come istante di valutazione.



Dato che dobbiamo considerare la tassazione, la cedola (semestrale) netta è

$$CED = \frac{rF}{2}(1 - \gamma) = \frac{0.06 \cdot 100}{2}(1 - 0.125) = 2.625.$$

L'equazione che lega il prezzo di emissione (P_E) al tasso di rendimento a scadenza (ym) è

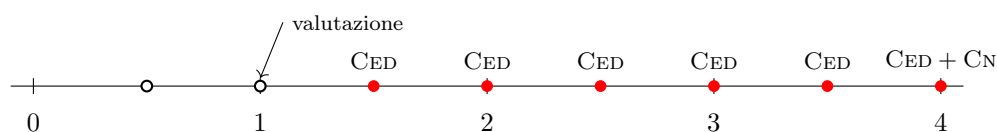
$$P_E = CED \cdot a_{\overline{y}ym_{1/2}} + CN (1 + ytm)^{-4}, \text{ con } CN = 100 - \max(0, 100 - P_E)\gamma.$$

Se $CN = 100$ (ossia $P_E > 100$ e non c'è tassazione sul rimborso) applicando la formula qui sopra si ottiene

$$P_E = 2.625 \cdot a_{\overline{y}ym_{1/2}} + 100 (1 + ytm)^{-4} = 101.12$$

e quindi l'ipotesi che il prezzo di emissione sia sopra la pari è corretta.

Poniamoci ora come istante di valutazione alla fine del primo anno ($t = 1$), nell'ipotesi che il tasso di rendimento a scadenza sia ora $ym = 6\%$.



Anzitutto dobbiamo ricontrollare la tassazione sul rimborso: rispetto a prima tasso e prezzo sono cambiati. Nell'ipotesi che sia $CN = 100$ la formula è ora

$$P = 2.625 \cdot a_{\overline{y}ym_{1/2}} + 100 (1 + ytm)^{-3} = 98.20 \quad (2)$$

e quindi questa volta il prezzo non può essere sopra la pari e il rimborso viene tassato. Pertanto

$$CN = 100 - (100 - P)\gamma.$$

Attenzione che P non è quello calcolato come P nella (2): il 98.20 è il prezzo che avremmo avuto nell'ipotesi, rivelatasi falsa, di non avere la tassazione sul rimborso. Per determinare CN occorre la "formula complicata" (che si trova nel formulario).¹⁰

Si ha

$$P = \frac{CED \cdot a_{\overline{y}ym_{1/2}} + 100(1 - \gamma)(1 + ytm_{1/2})^{-6}}{1 - \gamma(1 + ytm_{1/2})^{-6}} = 97.99. \quad \text{Si trova anche } CN = 99.749.$$

¹⁰Ricordo che in questo caso, dato che nell'equazione l'incognita P compare a sinistra e anche a destra all'interno di CN , si tratta semplicemente di ricavare dall'equazione P in funzione di tutte le altre quantità, che sono note.

Ora calcoliamo la duration nell'istante $t = 1$, usando come tasso il tasso di rendimento a scadenza. Serve la increasing annuity (le cedole sono 6 e il tasso è semestrale).

$$Ia_{\overline{6}|ym_{1/2}} = a_{\overline{6}|ym_{1/2}} + \frac{a_{\overline{6}|ym_{1/2}} - 6(1 + ytm_{1/2})^{-6}}{ym_{1/2}} = 18.5269068.$$

Ora la formula della duration (attenzione anche qui, ovviamente la duration sarà espressa in semestri):

$$D_{1/2} = \frac{CED \cdot Ia_{\overline{6}|ym_{1/2}} + 6 \cdot CN(1 + ytm_{1/2})^{-6}}{CED \cdot a_{\overline{6}|ym_{1/2}} + CN(1 + ytm_{1/2})^{-6}} = 5.624343044 \quad (\text{semestri}).$$

Dobbiamo convertire la duration in anni.

$$D = \frac{D_{1/2}}{2} = 2.812171522.$$

La duration modificata è

$$D_{\text{mod}} = \frac{D}{1 + 0.06} = 2.652992.$$

Ora il calcolo della variazione del prezzo.

$$\Delta P \simeq -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P.$$

Abbiamo una diminuzione *relativa* del tasso del 10%, e quindi $\Delta i = -0.06 \cdot 0.1 = -0.006$. Pertanto

$$\Delta P \simeq -2.652992 \cdot (-0.006) \cdot 97.99 = +1.5598.$$

ESERCIZIO 4. Si considerino i due progetti di investimento

$$A. \quad \begin{array}{cccc} -10 & 12 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad B. \quad \begin{array}{cccc} -5 & 7 & -3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

con struttura per scadenza (in fattori di sconto): $v(0, 1) = 0.98$, $v(0, 2) = 0.94$ e $v(0, 3) = 0.90$.

Si calcolino i corrispondenti tassi di interesse a pronti *su base annua* $i(0, 1)$, $i(0, 2)$ e $i(0, 3)$ e il tasso di interesse a termine *su base annua* $i(0, 1, 3)$.

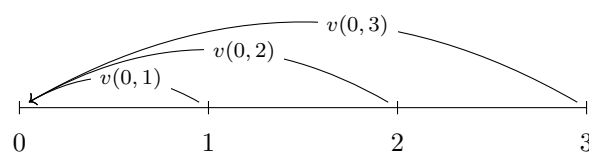
Si calcolino poi i REA/VAN dei due progetti e si stabilisca quale dei due progetti risulta conveniente.

Si dica perché per il progetto *A* si può affermare che il TIR esiste ed è unico e che è maggiore del 20%. Quale dovrebbe essere il valore in $t = 3$ per avere un TIR esattamente del 20%?

Si dia infine la valutazione complessiva del progetto *A* usando il criterio TRM con tasso a debito $i_- = 10\%$ e tasso a credito $i_+ = 5\%$.



La rappresentazione qui sotto raffigura la struttura dei fattori.



Calcoliamo i tassi a pronti sulle tre scadenze.

$$i(0, 1) = \frac{1}{v(0, 1)} - 1 = 0.020408163, \text{ che è direttamente su base annua.}$$

$$i_p(0, 2) = \frac{1}{v(0, 2)} - 1 = 0.063829787, \text{ su base biennale e quindi}$$

$$i_a(0, 2) = (1 + i_p(0, 2))^{1/2} - 1 = 0.031421246, \text{ su base annua.}$$

$$i_a(0, 3) = \frac{1}{v(0, 3)^{1/3}} - 1 = 0.035744168, \text{ su base annua.}$$

Ora il tasso a termine $i(0, 1, 3)$. Conviene prima calcolare il fattore di sconto corrispondente:

$$v(0, 1, 3) = \frac{v(0, 3)}{v(0, 1)} = 0.918367346$$

e quindi

$$i_a(0, 1, 3) = \frac{1}{v(0, 1, 3)^{1/2}} - 1 = 0.043498389, \text{ su base annua.}$$

Calcoliamo i REA (attraverso i fattori di sconto).

$$\text{REA}_A = -10 + 12 \cdot v(0, 1) - v(0, 2) + 2 \cdot v(0, 3) = 2.62$$

e

$$\text{REA}_B = -5 + 7 \cdot v(0, 1) - 3 \cdot v(0, 2) + 4 \cdot v(0, 3) = 2.64.$$

Il REA è positivo per entrambi (quindi sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro) e risulta preferibile il progetto B .

Per l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento del progetto A calcoliamo il suo flusso cumulato:

$$-10, +2, +1, +3.$$

Il flusso cumulato cambia segno una sola volta e quindi possiamo affermare che il TIR di A esiste ed è unico. Con una struttura piatta dei tassi ($i = 20\%$) il REA di A è

$$-10 + 12 \cdot 1.2^{-1} - 1 \cdot 1.2^{-2} + 2 \cdot 1.2^{-3} = 0.46 > 0.$$

Quindi il TIR per il progetto A è maggiore del 20%.

Determiniamo il valore X in $t = 3$ che porta ad un TIR esattamente del 20%. Basta scrivere l'equazione

$$-10 + 12 \cdot 1.2^{-1} - 1 \cdot 1.2^{-2} + X \cdot 1.2^{-3} = 0.$$

Si ricava

$$X = -10 \cdot 1.2^3 - 12 \cdot 1.2^2 + 1.2 = 1.2.$$

Per concludere, la valutazione del progetto A con il criterio TRM ($i_- = 10\%$ e $i_+ = 5\%$).

$$M_0 = -10 (< 0)$$

$$M_1 = -10 \cdot 1.1 + 12 = 1 (> 0)$$

$$M_2 = 1 \cdot 1.05 - 1 = 0.05 (> 0)$$

$$M_3 = 0.05 \cdot 1.05 + 2 = 2.0525.$$

Possiamo affermare che, in base al criterio TRM, il progetto A è conveniente.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 01/09/2022

ESERCIZIO 1. Si vuole poter disporre di 30 000€ fra 3 anni, assumendo un tasso del 5%.

È possibile versando rate mensili anticipate (immediate) di 800€? Determinare poi la rata per avere quella disponibilità con versamenti mensili (costanti), il primo tra 3 mesi e l'ultimo un mese prima della scadenza dei 3 anni. Si determini infine, in questa seconda modalità, quanto accumulato subito dopo il versamento alla fine del 2° anno.



Serve il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 5%. Poniamo $i = 0.05$, da cui $i_{1/12} = (1+i)^{1/12} - 1 = 0.00407412$. Per dire se i versamenti di 800€ sono sufficienti per costituire la disponibilità voluta basta calcolare il montante di questi versamenti, ricordando che sono anticipati: sono in tutto 36, versati all'inizio di ogni periodo (mese). Si ha

$$M = 800 \cdot a_{\overline{36}|i_{1/12}} (1+i_{1/12})(1+i)^3 = 31\,077.54\text{€}$$

Pertanto la risposta è affermativa, è possibile raggiungere l'obiettivo (e superarlo) con questa modalità.

Ora i versamenti non sono più immediati, ma il primo tra 3 mesi e l'ultimo un mese prima della scadenza dei 3 anni.



Abbiamo 10 versamenti nel 1° anno (compreso quello nell'istante finale), 12 versamenti nel 2° anno e 11 versamenti nel 3° anno. Ma è più semplice osservare che sono i 36 versamenti anticipati di prima, meno i primi 3. Quindi ora abbiamo 33 versamenti.

L'equazione che ci permette di trovare la rata è

$$R \cdot a_{\overline{33}|i_{1/12}} (1+i_{1/12})^{-2} (1+i)^3 = 30\,000$$

da cui si ricava

$$R = \frac{30\,000}{a_{\overline{33}|i_{1/12}} (1+i_{1/12})^{-2} (1+i)^3} = 847.74\text{€}.$$

Con la modalità appena usata, subito dopo il versamento alla fine del 2° anno abbiamo versato

$$847.74 \cdot a_{\overline{22}|i_{1/12}} (1+i_{1/12})^{-2} (1+i)^2 = 19\,470.25\text{€},$$

osservando che i versamenti sono 10 nel 1° anno (compreso quello nell'istante finale) e 12 nel 2° anno.

ESERCIZIO 2. Per rimborsare in 4 anni un debito D_0 di 1 000€ al tasso dell'8% si usa un piano di ammortamento con quote interesse anticipate e quote capitale posticipate in progressione aritmetica, che aumentano ogni anno di 50€. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.



Le quote interessi sono anticipate e quindi vanno calcolate moltiplicando il debito residuo per il tasso di sconto (poniamo $i = 0.08$). Si ha

$$d = \frac{i}{1+i} = 0.07407407.$$

La prima quota interessi è quindi $I_0 = d \cdot D_0 = d \cdot 1\,000 = 74.07\text{€}$.

Ora dobbiamo determinare le quote capitale, sapendo che ogni anno aumentano di 50€. Detta C_1 la prima, le altre sono evidentemente

$$C_2 = C_1 + 50, \quad C_3 = C_1 + 100, \quad C_4 = C_1 + 150.$$

Pertanto la somma delle quote capitale è

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 4C_1 + 300.$$

Dovendo questa essere uguale al debito iniziale, avremo

$$4C_1 + 300 = 1000 \quad \text{e quindi} \quad C_1 = \frac{700}{4} = 175\text{€}.$$

Pertanto

$$C_2 = 225\text{€}, \quad C_3 = 275\text{€}, \quad C_4 = 325\text{€}.$$

Per completare il piano di ammortamento basta ora, per ogni anno, in sequenza calcolare il nuovo debito residuo e la nuova quota interessi. Si ha

$$D_1 = D_0 - C_1 = 1000 - 175 = 825\text{€}, \quad I_1 = d \cdot D_1 = 61.11\text{€}$$

e quindi

$$D_2 = D_1 - C_2 = 825 - 225 = 600\text{€}, \quad I_2 = d \cdot D_2 = 44.44\text{€}$$

e infine

$$D_3 = D_2 - C_3 = 600 - 275 = 325\text{€}, \quad I_3 = d \cdot D_3 = 24.07\text{€},$$

osservando poi che il piano si chiude regolarmente dato che $D_3 = C_4$ e quindi il debito residuo finale si annulla.

Resta solo il calcolo delle rate con $R_t = C_t + I_t$. Il prospetto riassuntivo è quindi questo:

t	R_t	C_t	I_t	D_t
0	74.07	0	74.07	1000
1	236.11	175	61.11	825
2	269.44	225	44.44	600
3	299.07	275	24.07	325
4	325	325	0	0

ESERCIZIO 3. Si consideri un'obbligazione emessa con le seguenti caratteristiche:

- valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza dopo 4 anni;
- cedole semestrali con tasso cedolare $r = 4\%$.

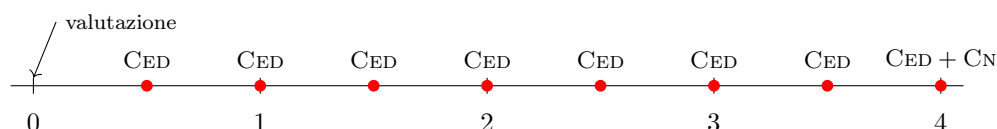
Si consideri la tassazione. Nell'ipotesi che all'emissione il tasso di rendimento a scadenza sia il 4%, si dica se è corretto affermare che il prezzo di emissione è sopra la pari.

Si consideri poi la situazione dopo un anno, subito dopo l'incasso della 2^a cedola, nell'ipotesi che il tasso di rendimento a scadenza sia sceso al 3.8%. Si determini la duration del titolo in quel momento.

Infine, utilizzando la duration trovata, si dia un'approssimazione della variazione del prezzo a seguito di una diminuzione relativa del tasso del 10%.



Poniamoci all'emissione ($t = 0$) come istante di valutazione.



Dato che dobbiamo considerare la tassazione, la cedola (semestrale) netta è

$$CED = \frac{r^F}{2}(1 - \gamma) = \frac{0.04 \cdot 100}{2}(1 - 0.125) = 1.75.$$

L'equazione che lega il prezzo di emissione (P_E) al tasso di rendimento a scadenza (ym) è

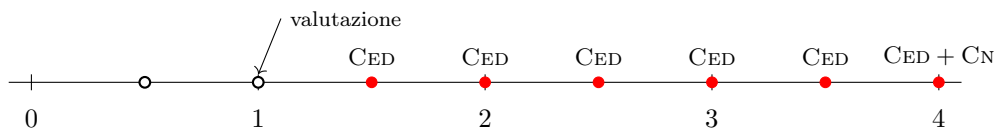
$$P_E = CED \cdot a_{\overline{6}|ym_{1/2}} + CN (1 + ym)^{-4}, \text{ con } CN = 100 - \max(0, 100 - P_E)\gamma.$$

Non possiamo sapere a priori se c'è tassazione sul rimborso, perché dipende dal prezzo di emissione, che non conosciamo. Nell'ipotesi che sia $CN = 100$ (ossia $P_E > 100$ e non ci sia quindi tassazione sul rimborso), applicando la formula qui sopra si ottiene

$$P_E = 1.75 \cdot a_{\overline{6}|ym_{1/2}} + 100 (1 + ym)^{-4} = 98.31,$$

e quindi l'ipotesi che il prezzo di emissione sia sopra la pari non è corretta.

Poniamoci ora come istante di valutazione alla fine del primo anno ($t = 1$), nell'ipotesi che il tasso di rendimento a scadenza sia sceso a $ym = 3.8\%$.



Per calcolare la duration ci serve il prezzo e non possiamo usare quanto calcolato in precedenza, dato che tasso e prezzo sono cambiati. Nell'ipotesi che sia $CN = 100$ (ossia $P > 100$) la formula è ora

$$P = 1.75 \cdot a_{\overline{6}|ym_{1/2}} + 100 (1 + ym)^{-3} = 99.256 \quad (3)$$

e ancora l'ipotesi è falsa. Il prezzo è sotto la pari e il rimborso viene tassato. Pertanto

$$CN = 100 - (100 - P)\gamma.$$

Attenzione che P non è quello calcolato come P nella (3): il 99.256 è il prezzo che avremmo avuto nell'ipotesi, rivelatasi falsa, di non avere la tassazione sul rimborso. Per determinare il prezzo occorre la "formula complicata" (che si trova nel formulario).¹¹

Si ha

$$P = \frac{CED \cdot a_{\overline{6}|ym_{1/2}} + 100(1 - \gamma)(1 + ym_{1/2})^{-6}}{1 - \gamma(1 + ym_{1/2})^{-6}} = 99.162. \quad \text{Si trova anche } CN = 99.895.$$

Ora calcoliamo la duration nell'istante $t = 1$, usando come tasso il tasso di rendimento a scadenza. Serve la increasing annuity (le cedole sono 6 e il tasso è semestrale).

$$Ia_{\overline{6}|ym_{1/2}} = a_{\overline{6}|ym_{1/2}} + \frac{a_{\overline{6}|ym_{1/2}} - 6(1 + ym_{1/2})^{-6}}{ym_{1/2}} = 19.37732078.$$

Ora la formula della duration (attenzione anche qui, ovviamente la duration sarà espressa in semestri):

$$D_{1/2} = \frac{CED \cdot Ia_{\overline{6}|ym_{1/2}} + 6 \cdot CN(1 + ym_{1/2})^{-6}}{CED \cdot a_{\overline{6}|ym_{1/2}} + CN(1 + ym_{1/2})^{-6}} = 5.74648593 \quad (\text{semestri}).$$

Dobbiamo convertire la duration in anni.

$$D = \frac{D_{1/2}}{2} = 2.87324297.$$

La duration modificata è

$$D_{\text{mod}} = \frac{D}{1 + 0.38} = 2.71060657.$$

¹¹Ricordo che in questo caso, dato che nell'equazione l'incognita P compare a sinistra e anche a destra all'interno di CN , si tratta semplicemente di ricavare dall'equazione P in funzione di tutte le altre quantità, che sono note.

Ora il calcolo della variazione del prezzo.

$$\Delta P \simeq -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P.$$

Abbiamo una diminuzione *relativa* del tasso del 10%, e quindi $\Delta i = -0.038 \cdot 0.1 = -0.0038$. Pertanto

$$\Delta P \simeq -2.71060657 \cdot (-0.0038) \cdot 99.895 = +1.0214.$$

ESERCIZIO 4. Si considerino i due progetti di investimento

A.

B.

con struttura per scadenza (in fattori di sconto): $v(0, 1) = 0.99$, $v(0, 2) = 0.96$ e $v(0, 3) = 0.92$.

Si calcolino i corrispondenti tassi di interesse a pronti *su base annua* $i(0, 1)$, $i(0, 2)$ e $i(0, 3)$ e il tasso di interesse a termine *su base annua* $i(0, 1, 3)$.

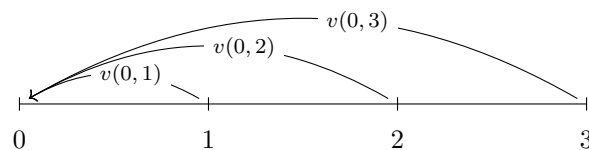
Si calcolino poi i REA/VAN dei due progetti e si stabilisca quale dei due progetti risulta conveniente.

Si dica perché per il progetto A si può affermare che il TIR esiste ed è unico e che è minore del 25%. Quale dovrebbe essere il valore in $t = 3$ per avere un TIR esattamente del 25%?

Si dia infine la valutazione complessiva del progetto A usando il criterio TRM con tasso a debito $i_- = 10\%$ e tasso a credito $i_+ = 5\%$.



La rappresentazione qui sotto raffigura la struttura dei fattori.



Calcoliamo i tassi a pronti sulle tre scadenze.

$$i(0, 1) = \frac{1}{v(0, 1)} - 1 = 0.01, \text{ che è direttamente su base annua.}$$

$$i_p(0, 2) = \frac{1}{v(0, 2)} - 1 = 0.041\bar{6}, \text{ su base biennale e quindi}$$

$$i_a(0, 2) = (1 + i_p(0, 2))^{1/2} - 1 = 0.02062073, \text{ su base annua.}$$

$$i_a(0, 3) = \frac{1}{v(0, 3)^{1/3}} - 1 = 0.02818372, \text{ su base annua.}$$

Ora il tasso a termine $i(0, 1, 3)$. Conviene prima calcolare il fattore di sconto corrispondente:

$$v(0, 1, 3) = \frac{v(0, 3)}{v(0, 1)} = 0.92$$

e quindi

$$i_a(0, 1, 3) = \frac{1}{v(0, 1, 3)^{1/2}} - 1 = 0.03734611, \text{ su base annua.}$$

Calcoliamo i REA (attraverso i fattori di sconto).

$$\text{REA}_A = -10 + 12 \cdot v(0, 1) - v(0, 2) + 2 \cdot v(0, 3) = 2.76$$

e

$$\text{REA}_B = -5 + 7 \cdot v(0, 1) - 3 \cdot v(0, 2) + 4 \cdot v(0, 3) = 2.73.$$

Il REA è positivo per entrambi (quindi sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro) e risulta preferibile il progetto A.

Per l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento del progetto A calcoliamo il suo flusso cumulato:

$$-10, +2, +1, +3.$$

Il flusso cumulato cambia segno una sola volta e quindi possiamo affermare che il TIR di A esiste ed è unico. Con una struttura piatta dei tassi ($i = 25\%$) il REA di A è

$$-10 + 12 \cdot 1.25^{-1} - 1 \cdot 1.25^{-2} + 2 \cdot 1.25^{-3} = -0.016 < 0.$$

Quindi il TIR per il progetto A è minore del 25%.

Determiniamo il valore X in $t = 3$ che porta ad un TIR esattamente del 25%. Basta scrivere l'equazione

$$-10 + 12 \cdot 1.25^{-1} - 1 \cdot 1.25^{-2} + X \cdot 1.25^{-3} = 0.$$

Si ricava

$$X = -10 \cdot 1.25^3 - 12 \cdot 1.25^2 + 1.25 = 2.03125.$$

Per concludere, la valutazione del progetto A con il criterio TRM ($i_- = 10\%$ e $i_+ = 5\%$).

$$M_0 = -10 (< 0)$$

$$M_1 = -10 \cdot 1.1 + 12 = 1 (> 0)$$

$$M_2 = 1 \cdot 1.05 - 1 = 0.05 (> 0)$$

$$M_3 = 0.05 \cdot 1.05 + 2 = 2.0525.$$

Possiamo affermare che, in base al criterio TRM, il progetto A è conveniente.