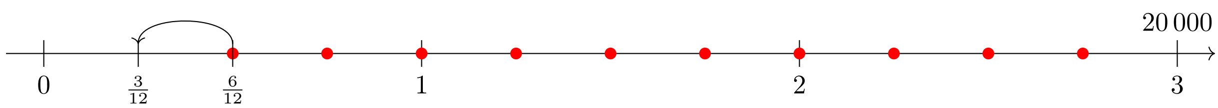
ESAME DI MODELLI MATEMATICI per le DECISIONI ECONOMICO-AZIENDALI
ESAME DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
PROVA INTERMEDIA
Vicenza, 05/11/2024

ESERCIZIO 1. Si vuole costituire un capitale di 20 000€ alla fine del terzo anno versando rate costanti trimestrali, la prima tra 6 mesi, l'ultima all'inizio dell'ultimo periodo. Si determini l'ammontare della rata, ipotizzando un tasso di interesse annuo del 5%.

Supponendo di avere la disponibilità alla fine del primo e del secondo anno di effettuare un versamento aggiuntivo di 1 000€, si determini di quanto si abbassa la rata costante.

✎

Può essere utile rappresentare lo schema dei versamenti. Attenzione al posizionamento dell'ultima rata: è scritto "all'inizio dell'ultimo periodo". Parlando di rendite il termine periodo non è un termine generico, ma un termine specifico. Il periodo è l'intervallo di tempo che separa due rate successive. Nel nostro caso è un trimestre e quindi all'inizio dell'ultimo periodo significa un trimestre prima della fine del terzo anno.



Serve il tasso trimestrale equivalente al tasso annuo del $i = 5\%$. Si ha $i_{1/4} = (1+i)^{1/4} - 1 = 0.01227223$.

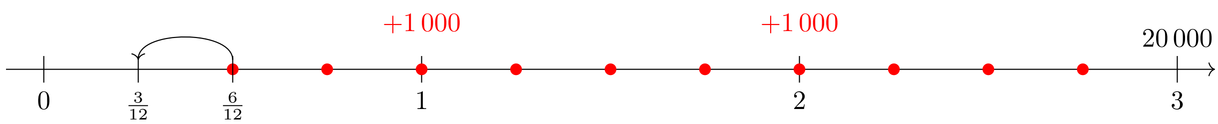
L'equazione del valore che consente di determinare la rata è

$$R \cdot a_{\overline{10|}i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{11} = 20\,000.$$

Si ottiene quindi

$$R = \frac{20\,000}{a_{\overline{10|}i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{11}} = 1\,869.08€.$$

Passiamo ora alla seconda domanda. Con un versamento aggiuntivo di 1 000€ alla fine del primo e del secondo anno la rappresentazione diventa



L'equazione diventa

$$R' \cdot a_{\overline{10|}i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{11} + 1\,000(1+i)^2 + 1\,000(1+i) = 20\,000.$$

da cui

$$R' = \frac{20\,000 - 1\,000(1+i)^2 - 1\,000(1+i)}{a_{\overline{10|}i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{11}} = 1\,667.92€.$$

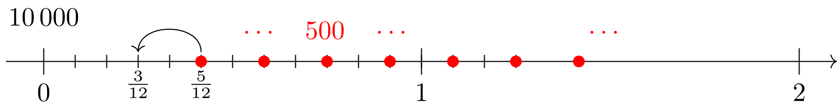
La rata quindi si abbassa di $R - R' = 201.16€$.

ESERCIZIO 2. Contraggo oggi un debito di 10 000€ e lo devo restituire in rate bimestrali di 500€, la prima fra 5 mesi, al tasso del 10%. Determinare quante rate intere e quale versamento aggiuntivo, contestuale all'ultima rata, occorrono.

Nell'ipotesi di restituire il debito, con le stesse modalità, in 30 rate, si provi che il tasso è compreso tra il 16% e il 17%.

✎

Può essere utile come sempre una rappresentazione grafica, nella pagina seguente.



La (dis)equazione del valore è

$$500 \cdot a_{\overline{n}|i_{1/6}}(1+i)^{-3/12} \geq 10\,000,$$

da cui dobbiamo trovare il numero n di rate. La disequazione equivale a

$$a_{\overline{n}|i_{1/6}} \geq \frac{10\,000}{500}(1+i)^{3/12}.$$

Indicando per comodità con A la quantità a destra si ottiene

$$\frac{1-(1+i_{1/6})^{-n}}{i_{1/6}} \geq A \quad ; \quad (1+i_{1/6})^{-n} \leq 1 - i_{1/6}A \quad ; \quad -n\ln(1+i_{1/6}) \leq \ln(1-i_{1/6}A)$$

e infine

$$n \geq -\frac{\ln(1-i_{1/6}A)}{\ln(1+i_{1/6})} = 25.02.$$

Quindi per coprire interamente il debito servono 25 rate da 500€ e un versamento aggiuntivo. Attenzione che non devo arrotondare per eccesso il 25.02, con 26 rate, perché così facendo restituirei più del dovuto. Dobbiamo ora trovare il versamento aggiuntivo, da pagare contestualmente all'ultima rata. Qui possiamo fare in due modi, trovando prima il valore in $t = 0$ di questo versamento e poi portandolo all'istante dell'ultima rata, oppure trovandolo direttamente nell'istante finale. Riporto entrambe le modalità.

Con la prima, il valore in $t = 0$ del versamento (Δ_0) è dato dalla differenza tra il debito e il valore attualizzato delle 25 rate, cioè

$$\Delta_0 = 10\,000 - 500 \cdot a_{\overline{25}|i_{1/6}}(1+i)^{-3/12} = 6.37€.$$

Quindi il valore alla scadenza è (l'ultima rata è dopo $3 + 25 \cdot 2 = 53$ mesi)

$$\Delta_{\text{scadenza}} = \Delta_0 \cdot (1+i)^{53/12} = 9.71€.$$

Con la seconda modalità si ha direttamente

$$\Delta_{\text{scadenza}} = 10\,000 \cdot (1+i)^{53/12} - 500 \cdot a_{\overline{25}|i_{1/6}}(1+i_{1/6})^{25} = 9.71€.$$

L'ultima domanda: restituendo il debito con le stesse modalità, ma in 30 rate, provare che il tasso è compreso tra il 16% e il 17%.

L'equazione che teoricamente permetterebbe di calcolare il vero valore del tasso (che per comodità indico con $i^\star$), è

$$500 \cdot a_{\overline{30}|i_{1/6}}(1+i)^{-3/12} = 10\,000.$$

Non possiamo risolvere esattamente questa equazione. Attenzione che non è corretto pensare di usare la formula che ci dà, in casi simili, una prima approssimazione del tasso.[1] L'unica modo di rispondere è quello di calcolare il valore del termine di sinistra per i due tassi proposti, verificando se questo è coerente con quanto si afferma, in riferimento al valore di 10 000€. Si ricordi che questa verifica funziona perché la funzione che esprime il termine di sinistra al variare del tasso è una funzione (strettamente) monotona.

Calcolando il termine con $i = 0.16$ si ottiene $10\,077.88 > 10\,000$, e quindi $i^\star > 16\%$; calcolando con $i = 0.17$ si ottiene $9\,862.35 < 10\,000$, e quindi $i^\star < 17\%$.

ESERCIZIO 3. Una società finanziaria, relativamente ad un bene con prezzo di listino $P = 10\,000€$, vuole proporre ad un cliente un contratto di leasing di durata 2 anni che prevede un anticipo del 5% del prezzo di listino, un riscatto

[1] Alludo alla formula

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R}.$$

Questa non è utilizzabile per due motivi, uno generale e uno specifico nella situazione che stiamo considerando. Il motivo generale è che la formula, fornendo un valore approssimato, non permette di essere certi del risultato. Detto in modo più esplicito, se trovassi che l'approssimazione è compresa tra il 16% e il 17%, non conoscendo la bontà dell'approssimazione, non potrei essere certo del risultato.

Il motivo specifico è che nel nostro caso abbiamo un differimento, che non è previsto nella formula.

pari al 4% del prezzo di listino e il versamento di 24 canoni mensili posticipati. La società può avere uno sconto del 2% sull'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto un tasso di interesse annuo del 6%. Si scriva l'equazione del valore per la società di leasing e si determini a quanto deve ammontare il canone da proporre al cliente.

Sapendo che il cliente può acquistare il bene al prezzo di listino, si scriva l'equazione del valore per il cliente. Sapendo infine che il cliente per l'acquisto diretto del bene può avere un prestito dalla sua banca al tasso di interesse annuo del 4%, si dica se egli ragionevolmente sceglierà il prestito bancario o il contratto di leasing.

✎

Le quantità rilevanti nel contratto sono il prezzo di listino $P = 10\,000$€, l'anticipo $A = P \cdot 0.05 = 500$€ e il riscatto finale $F = P \cdot 0.04 = 400$€.

Grazie allo sconto la società finanziaria spende $10\,000 \cdot (1 - 0.02) = 9\,800$€ per l'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto di leasing un tasso di interesse $i = 6\%$. Serve il tasso di interesse mensile $i_{1/12} = 1.06^{1/12} - 1 = 0.00486755$.

Indicato con R il canone mensile, l'equazione del valore per la società di leasing è

$$9\,800 = 500 + R \cdot a_{\overline{24}|i_{1/12}} + 400(1 + i)^{-2}.$$

Da questa si ricava

$$R = \frac{9\,800 - 500 - 400(1 + i)^{-2}}{a_{\overline{24}|i_{1/12}}} = 395.76\text{€}.$$

Ora passiamo alla valutazione del cliente, al quale viene proposto un contratto di leasing con le caratteristiche ottenute poco fa (cioè un anticipo di 500€, un riscatto finale di 400€ e un canone di 24 rate trimestrali di 395.76€). Il cliente non ha sconto sul prezzo d'acquisto del bene. Egli è interessato a scoprire qual è il tasso implicito nell'equivalenza finanziaria tra lo spendere oggi 10 000€ e distribuire il pagamento nel tempo alle condizioni del contratto.

La sua equazione del valore è quindi

$$10\,000 = 500 + 395.76\ a_{\overline{24}|i_{1/12}} + 400(1 + i)^{-2},$$

con un tasso i questa volta incognito.

La soluzione esatta di questa equazione fornirebbe al cliente un valore preciso da confrontare con il tasso del 4% proposto dalla banca per un prestito di 10 000€. La risoluzione esatta (in realtà approssimata) richiederebbe l'uso di approssimazioni successive, eventualmente con il metodo di Newton, e non è richiesta.

Per poter dire quale sarà la scelta ragionevole del cliente tra stipulare il contratto di leasing e chiedere un prestito alla banca al tasso $i^{(B)} = 4\%$ possiamo semplicemente calcolare il valore attuale degli importi relativi al contratto al tasso della banca. Dopo aver calcolato il tasso equivalente mensile $i^{(B)}_{1/12} = 0.00327374$, si trova

$$500 + 395.76\ a_{\overline{24}|i^{(B)}_{1/12}} + 400(1 + i^{(B)})^{-2} = 9\,990.24\text{€}.$$

Dato che $9\,990.24 < 10\,000$, il tasso della banca sconta di più gli importi rispetto al tasso effettivo incognito e quindi il tasso della banca è maggiore rispetto al tasso del contratto.

Il cliente ragionevolmente sceglierà il contratto di leasing.

ESERCIZIO 4. Per rimborsare in 4 anni un debito di 5 000€ con rate posticipate si usa un piano di ammortamento di cui conosco le prime due quote capitale $C_1 = C_2 = 1\,500$€ e l'ultima rata $R_4 = 800$€. Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Infine, sempre con rate posticipate, nell'ipotesi di pagare quote capitale che ogni anno diminuiscono del 20%, si ricompili il piano di ammortamento.

✎

Le quote sono tutte posticipate. La prima parte del piano è facile, in quanto le prime due quote capitale sono note: $C_1 = C_2 = 1\,500$€.

Si possono trovare in sequenza

$$\begin{gathered}I_1 = i \cdot D_0 = 0.1 \cdot 5\,000 = 500€ \\ R_1 = C_1 + I_1 = 1\,500 + 500 = 2\,000€ \\ D_1 = D_0 - C_1 = 5\,000 - 1\,500 = 3\,500€ \\ I_2 = i \cdot D_1 = 0.1 \cdot 3\,500 = 350€ \\ R_2 = C_2 + I_2 = 1\,500 + 350 = 1\,850€ \\ D_2 = D_1 - C_2 = 3\,500 - 1\,500 = 2\,000€ \\ I_3 = i \cdot D_2 = 0.1 \cdot 2\,000 = 200€.\end{gathered}$$

Ora non è più così immediato. Conosciamo la quarta rata $R_4 = 800€$. Propongo due modi.

Usando l'equivalenza finanziaria, cioè l'uguaglianza tra il valore del debito e il valore attuale cumulato delle rate, possiamo scrivere l'equaazione

$$R_1\,(1+i)^{-1} + R_2\,(1+i)^{-2} + R_3\,(1+i)^{-3} + R_4\,(1+i)^{-4} = 5\,000 \text{ (non conosciamo } R_3)$$

da cui

$$\begin{aligned}R_3 &= \frac{5\,000 - R_1\,(1+i)^{-1} - R_2\,(1+i)^{-2} - R_4\,(1+i)^{-4}}{(1+i)^{-3}} \\ &= \frac{5\,000 - 2\,000\,(1+i)^{-1} - 1\,850\,(1+i)^{-2} - 800\,(1+i)^{-4}}{(1+i)^{-3}} \\ &= 1\,472.73€.\end{aligned}$$

Questo permette di completare il piano con

$$\begin{gathered}C_3 = R_3 - I_3 = 1\,472.73 - 200 = 1\,272.73€ \\ D_3 = D_2 - C_3 = 2\,000 - 1\,272.73 = 727.27€ \\ I_4 = i \cdot D_3 = 0.1 \cdot 727.27 = 72.73€ \\ C_4 = R_4 - I_4\;(= D_3) = 727.27€.\end{gathered}$$

Il prospetto completo è il seguente.

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	5 000
1	2 000	1 500	500	3 500
2	1 850	1 500	350	2 000
3	1 472.73	1 272.73	200	727.27
4	800	727.27	72.73	0

Una seconda modalità può essere questa, considerando che $D_3 = C_4$.

$$R_4 = C_4 + I_4 \quad , \quad R_4 = C_4 + i \cdot D_3 \quad , \quad R_4 = C_4 + i \cdot C_4 \quad , \quad R_4 = C_4\,(1+i) \quad , \quad C_4 = \frac{R_4}{1+i} = 727.27€.$$

Ora l'ultima domanda, in cui abbiamo quote capitale che ogni anno diminuiscono del 20%. Ponendo $q = 1 - 0.2 = 0.8$ (ragione della progressione geometrica), possiamo scrivere il vincolo di chiusura

$$C_1 + C_1\,q + C_1\,q^2 + C_1\,q^3 = D_0,$$

da cui

$$C_1 = \frac{D_0}{1 + q + q^2 + q^3} = 1\,693.77€.$$

Le quote capitale successive si calcolano in progressione geometrica con

$$C_2 = C_1\, q = 1\,355.01€$$
$$C_3 = C_1\, q^2 = 1\,084.01€$$
$$C_4 = C_1\, q^3 = 867.21€.$$

Questo permette di calcolare la sequenza del debito residuo, delle quote interessi e delle rate. Il prospetto completo ora è il seguente.

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	5 000
1	2 193.77	1 693.77	500	3 306.23
2	1 685.64	1 355.01	330.62	1 951.22
3	1 279.13	1 084.01	195.12	867.21
4	953.93	867.21	86.72	0

Si poteva anche servirsi della formula che dà il valore attuale di una rendita con rate in progressione geometrica,[2] adattandola al caso in questione, cioè ponendo il fattore di sconto $v = 1$, dato che nel vincolo di chiusura le quote capitale pesano per quello che sono, quindi senza attualizzazione. L'equazione pertanto diventa

$$D_0 = C_1\,\frac{1-q^4}{1-q}, \text{ da cui } C_1 = D_0\,\frac{1-q}{1-q^4} = 1\,693.77€.$$

[2]

$$V_0 = \begin{cases} Rv\dfrac{1-(qv)^n}{1-qv} & \text{se } qv \neq 1 \\ nRv & \text{se } qv = 1 \end{cases}$$