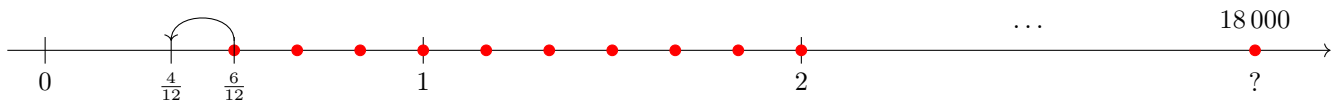


ESAME DI MODELLI MATEMATICI per le DECISIONI ECONOMICO-AZIENDALI
PROVA INTERMEDIA
Vicenza, 06/11/2025

ESERCIZIO 1. Con quante rate bimestrali di 600€, la prima tra 6 mesi, posso costituire un capitale di 18000€ al tasso di interesse annuo del 5%? Dopo quanti mesi, per la prima volta, raggiungo (superandolo) l'obiettivo? Di quanto lo supero? Se il primo versamento slittasse alla fine del primo anno, di quanto aumenterebbe la rata, volendo mantenere la stessa scadenza?



Come sempre può essere utile rappresentare lo schema dei versamenti.



Serve il tasso bimestrale equivalente al tasso annuo del $i = 5\%$. Si ha $i_{1/6} = (1 + i)^{1/6} - 1 = 0.00816485$. Dobbiamo trovare il numero n di rate.

L'equazione (disequazione) del valore è

$$600 \cdot a_{\overline{n}|i_{1/6}} (1 + i_{1/6})^n \geq 18000.$$

La disequazione equivale a

$$a_{\overline{n}|i_{1/6}} (1 + i_{1/6})^n \geq 30 \quad \text{cioè} \quad \frac{1 - (1 + i_{1/6})^{-n}}{i_{1/6}} (1 + i_{1/6})^n \geq 30$$

ossia

$$(1 + i_{1/6})^n - 1 \geq 30i_{1/6} \quad \text{cioè} \quad n \geq \frac{\ln(1 + 30i_{1/6})}{\ln(1 + i_{1/6})} = 26.94.$$

Quindi per costituire il capitale voluto servono almeno 27 rate, con le quali ovviamente supero il capitale di 18000€. Per trovare il mese in cui verso la 27ª rata basta fare $4 + 27 \cdot 2 = 58$, quindi al 58° mese.

Il capitale costituito con 27 rate bimestrali è

$$M = 600 \cdot a_{\overline{27}|i_{1/6}} (1 + i_{1/6})^{27} = 18042.47\text{€}, \quad \text{quindi } 42.47\text{€ in più}.$$

Se il primo versamento slittasse alla fine del primo anno verserei 3 rate in meno, quindi 24. Volendo mantenere la stessa scadenza, cioè al 58° mese, con una nuova rata R' l'equivalenza finanziaria sarebbe

$$R' \cdot a_{\overline{24}|i_{1/6}} (1 + i_{1/6})^{24} = 18000,$$

da cui

$$R' = \frac{18000}{a_{\overline{24}|i_{1/6}} (1 + i_{1/6})^{24}} = 681.96\text{€} \quad \text{quindi } 81.96\text{€ in più}.$$

ESERCIZIO 2. Una società finanziaria, relativamente ad un bene con prezzo di listino $P = 15000\text{€}$, vuole proporre ad un cliente un contratto di leasing di durata 2 anni che prevede il versamento di 24 canoni mensili posticipati, un anticipo dello stesso importo dei canoni e un riscatto pari al 5% del prezzo di listino. La società può avere uno sconto del 2% sull'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto un tasso di interesse annuo del 7%. Si scriva l'equazione del valore per la società di leasing e si determini a quanto deve ammontare il canone da proporre al cliente.

Sapendo che il cliente può acquistare il bene al prezzo di listino, si scriva l'equazione del valore per il cliente. Il cliente, per l'acquisto diretto del bene, può avere un prestito dalla sua banca al tasso di interesse annuo del 6%: si dica se egli ragionevolmente sceglierà il prestito bancario o il contratto di leasing.

Si dica infine se la formula studiata per trovare una prima approssimazione del tasso interno di una rendita può essere usata per approssimare il tasso di costo, per il cliente, del contratto di leasing.



Le quantità rilevanti nel contratto sono il prezzo di listino $P = 15\,000\text{€}$, l'anticipo pari ad una rata del canone (non ancora noto) e il riscatto finale $F = P \cdot 0.05 = 750\text{€}$.

Grazie allo sconto la società finanziaria spende $15\,000 \cdot (1 - 0.02) = 14\,700\text{€}$ per l'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto di leasing un tasso di interesse $i = 7\%$. Serve il tasso di interesse mensile $i_{1/12} = 1.07^{1/12} - 1 = 0.005654145$.

Indicato con R il canone mensile, l'equazione del valore per la società di leasing è

$$14\,700 = R + R \cdot a_{\overline{24}|i_{1/12}} + 750(1+i)^{-2}.$$

Da questa si ricava

$$R = \frac{14\,700 - 750(1+i)^{-2}}{1 + a_{\overline{24}|i_{1/12}}} = 600.63\text{€}.$$

Ora passiamo alla valutazione del cliente, al quale viene proposto un contratto di leasing con le caratteristiche ottenute poco fa (cioè in pratica 25 rate mensili di 600.63€ , la prima subito e un riscatto finale di 750€). Il cliente non ha sconto sul prezzo d'acquisto del bene. Egli è interessato a scoprire qual è il tasso implicito nell'equivalenza finanziaria tra lo spendere oggi $15\,000\text{€}$ e distribuire il pagamento nel tempo alle condizioni del contratto.

La sua equazione del valore è quindi

$$15\,000 = 600.63 + 600.63 a_{\overline{24}|i_{1/12}} + 750(1+i)^{-2},^1$$

con un tasso i questa volta incognito.

La soluzione esatta di questa equazione fornirebbe al cliente un valore preciso da confrontare con il tasso del 6% proposto dalla banca per un prestito di $15\,000\text{€}$. La risoluzione esatta (in realtà approssimata) non è richiesta.

Per poter dire quale sarà la scelta ragionevole del cliente tra stipulare il contratto di leasing e chiedere un prestito alla banca al tasso $i^{(B)} = 6\%$ possiamo semplicemente calcolare il valore attuale degli importi relativi al contratto al tasso della banca. Dopo aver calcolato il tasso equivalente mensile $i_{1/12}^{(B)} = 0.00486755$, si trova

$$600.63 + 600.63 a_{\overline{24}|i_{1/12}^{(B)}} + 750(1+i^{(B)})^{-2} = 14\,841.89\text{€}.$$

Dato che il valore ottenuto è minore di $15\,000\text{€}$, il tasso della banca sconta di più gli importi rispetto al tasso effettivo incognito e quindi il tasso della banca è maggiore rispetto al tasso del contratto. Il cliente ragionevolmente sceglierà il contratto di leasing.

L'ultima domanda chiede se la formula che fornisce una prima approssimazione del tasso interno di una rendita, cioè

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R}, \text{ relativa all'equazione } V_0 = R \cdot a_{\overline{n}|i},$$

può essere usata nel nostro caso, cioè per approssimare il tasso di costo, per il cliente, del contratto di leasing.

No, questa formula non può essere usata qui, dato che la nostra equazione è del tipo

$$P_0 = R + R \cdot a_{\overline{n}|i} + F(1+i)^{-n},$$

e questa non è riconducibile a quella sopra, non tanto per la presenza nel termine di destra del primo R , quanto per la presenza alla fine di un termine che contiene il tasso incognito.

ESERCIZIO 3. Rimborso in 4 anni un debito di $5\,000\text{€}$, al tasso del 10% , attraverso un piano di ammortamento con rate annue posticipate che ogni anno aumentano del 20% . Si trovino le 4 rate e la scomposizione (quota capitale e quota interessi) dell'ultima rata.

Supponendo invece di usare, per lo stesso debito, un piano di ammortamento in cui le prime due rate sono $R_1 = R_2 = 1\,500\text{€}$ e l'ultima quota interessi è $I_4 = 100\text{€}$, si costruisca il piano di ammortamento indicando, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

¹Dato che l'anticipo è uguale al canone, si poteva alternativemente scrivere, con la formula delle rate anticipate,

$$15\,000 = 600.63 a_{\overline{25}|i_{1/12}} (1 + i_{1/12}) + 750(1+i)^{-2}.$$

Si verifichi infine l'equivalenza finanziaria per il piano così ottenuto.



Le rate sono in progressione geometrica con ragione $q = 1.2$. L'equivalenza finanziaria permette di determinare subito la prima rata R_1 . Con la formula del valore attuale di rate in progressione geometrica, si ha (serve anche il fattore di sconto $v = \frac{1}{1+0.1} = 0.90$)

$$5\,000 = R_1 \cdot v \cdot \frac{1 - (qv)^4}{1 - qv},$$

da cui

$$R_1 = \frac{5\,000}{v} \cdot \frac{1 - qv}{1 - (qv)^4} = 1\,201.07\text{€}.$$

Le altre rate sono in sequenza

$$R_2 = R_1 \cdot q = 1\,441.28\text{€} \quad , \quad R_3 = R_2 \cdot q = 1\,729.54\text{€} \quad , \quad R_4 = R_3 \cdot q = 2\,075.44\text{€}.$$

Per avere la scomposizione (quota capitale e quota interessi) dell'ultima rata serve compilare tutto il piano di ammortamento. Si ottiene

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	5 000
1	1 201.07	701.07	500	4 298.93
2	1 441.28	1 011.39	429.89	3 287.55
3	1 729.54	1 400.78	328.75	1 886.77
4	2 075.44	1 886.77	188.68	0

t	R_t	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	5 000
1	1 500			
2	1 500			
3				
4			100	0

Nella seconda modalità abbiamo qui a sinistra la situazione con i dati iniziali. Possiamo riempire subito le prime righe del piano, in sequenza:

$$\begin{aligned} I_1 &= i \cdot D_0 = 500, \quad C_1 = R_1 - I_1 = 1\,000 \\ D_1 &= D_0 - C_1 = 4\,000, \quad I_2 = i \cdot D_1 = 400 \\ C_2 &= R_2 - I_2 = 1\,100, \quad D_2 = D_1 - C_2 = 2\,900 \\ I_3 &= i \cdot D_2 = 290. \end{aligned}$$

t	R_t	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	5 000
1	1 500	1 000	500	4 000
2	1 500	1 100	400	2 900
3			290	
4			100	0

e otteniamo il prospetto a destra.

Ora non possiamo più ricavare C_3 , perché non conosciamo la corrispondente rata R_3 .

Però, da $I_4 = 100$, possiamo ricavare $D_3 = C_4 = 1\,000$ e $C_3 = D_2 - D_3 = 1\,900$ e le corrispondenti rate R_3 e R_4 .

Pertanto il prospetto completo del piano è

t	R_t	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	5 000
1	1 500	1 000	500	4 000
2	1 500	1 100	400	2 900
3	2 190	1 900	290	1 000
4	1 100	1 100	100	0

Per finire la verifica dell'equivalenza finanziaria di questo piano. Si trova

$$1\,500(1+i)^{-1} + 1\,500(1+i)^{-2} + 2\,190(1+i)^{-3} + 1\,100(1+i)^{-4} = 5\,000.$$

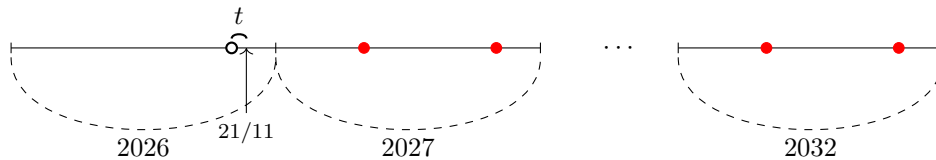
PROVA CONCLUSIVA DI MODELLI MATEMATICI per le DECISIONI ECONOMICO-AZIENDALI
Vicenza, 21/01/2026

ESERCIZIO 1. Si consideri un B.T.P. con scadenza il 01/11/2032, che paga cedole al tasso cedolare $r = 4.5\%$. Il 21/11/2026 si osserva un tasso di rendimento a scadenza pari al $i = 3.5\%$. Assumendo che il BTP rimborsi alla pari, si determini Prezzo tel-quel, rateo e corso secco in data 21/11/2026 (si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si consideri poi lo scenario alternativo in cui il B.T.P. descritto sopra rimborsa sopra la pari con rimborso a scadenza $C = 150$. Si determini se questo comporterebbe il pagamento di tasse sulle plusvalenze a scadenza.



Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Fino alla scadenza del 01/11/2032 il titolo paga $n = 12$ cedole. Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1 - \gamma) = \frac{0.045}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 1.96875.$$

Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/11/2026) è $t = 20$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 1.96875 \cdot \frac{20}{180} = 0.21875.$$

Conoscendo il tasso di rendimento a scadenza, nell'ipotesi che non ci sia tassazione sul rimborso finale, possiamo trovare il prezzo tel quel.

$$P_{\text{tq}} = 1.96875 \cdot a_{\overline{12}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{20/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-12+20/180} = 102.709.$$

Il corso secco risulta allora

$$P_s = P_{\text{tq}} - \text{rateo} = 102.491, \text{ maggiore del valore rimborsato.}$$

Pertanto possiamo concludere che è corretta l'ipotesi della non tassazione finale e quindi si ha

$$P_{\text{tq}} = 102.709 \quad \text{e} \quad P_s = 102.491.$$

Consideriamo ora lo scenario alternativo in cui il B.T.P. rimborsa sopra la pari con rimborso a scadenza $C = 150$. Ipotizzando anche qui la non tassazione del rimborso finale, l'equazione di prima diventa (con lo stesso tasso di rendimento a scadenza)

$$P_{\text{tq}} = 1.96875 \cdot a_{\overline{12}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{20/180} + 150(1 + ytm_{1/2})^{-12+20/180} = 143.462.$$

da cui si ricava il corso secco

$$P_s = P_{\text{tq}} - \text{rateo} = 143.243.$$

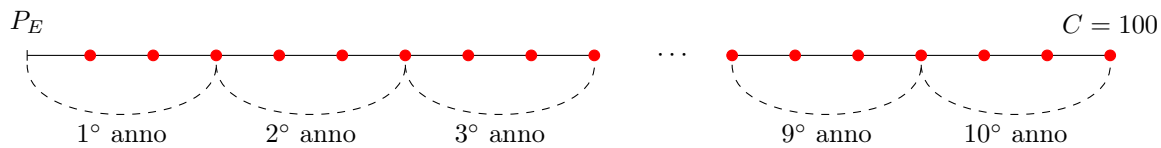
Questa volta l'ipotesi non è coerente con i valori: la nuova situazione comporterebbe il pagamento di tasse sulle plusvalenze a scadenza.

ESERCIZIO 2. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/10/2025 con le seguenti caratteristiche:

- valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza dopo 10 anni;
- cedole quadrimestrali con tasso cedolare $r = 3\%$.

Non si consideri la tassazione ma si consideri l'anno commerciale. Ipotizzando un prezzo di emissione $P_E = 99.3$, e supponendo di poter reinvestire le cedole in conto remunerato al tasso $i_R = 2\%$, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nell'obbligazione.

A parità di prezzo di emissione e di tutte le altre caratteristiche dell'obbligazione, quale tasso cedolare permetterebbe di ottenere un tasso effettivo di rendimento pari al 7%?



Può bastare una rappresentazione di questo tipo, dato che non serve il riferimento alle precise date di emissione e pagamento delle cedole. Questo perché stiamo considerando l'anno commerciale.

Vi sono 30 cedole. Non essendoci tassazione la cedola quadrimestrale è

$$CED = \frac{r}{3}F = \frac{0.03}{3} \cdot 100 = 1 \quad \text{e il rimborso è } C = 100.$$

Il tasso effettivo è il tasso al quale si ha equivalenza finanziaria (cioè riferita allo stesso istante di tempo) tra il prezzo pagato all'emissione e il montante di quanto il titolo garantisce, cioè le cedole e il rimborso finale. Scegliamo come istante di valutazione la scadenza del titolo. Le cedole vengono reinvestite al tasso $i_R = 2\%$ e serve il tasso equivalente quadrimestrale

$$0.02_{1/3} = (1 + 0.02)^{1/3} - 1 = 0.00662271.$$

Il montante delle cedole è

$$M_{CED} = CED \cdot a_{\overline{30}|0.02_{1/3}} (1 + 0.02)^{10} = 33.067194.$$

Indicando con i_{eff} il tasso effettivo, l'equazione è

$$P_E(1 + i_{\text{eff}})^{10} = M_{CED} + 100 \quad , \text{ da cui } i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_{CED} + 100}{P_E} \right)^{1/10} - 1 = 0.02970347.$$

Passiamo alla seconda domanda. Si chiede di trovare il tasso cedolare che permetterebbe di avere un tasso effettivo del 7% a parità di tutte le altre caratteristiche dell'obbligazione.

Nell'equazione appena usata, e cioè

$$P_E(1 + i_{\text{eff}})^{10} = M_{CED} + 100,$$

ora conosciamo il tasso effettivo (7%) e invece non conosciamo il montante delle cedole, dato che non conosciamo la cedola. Possiamo ricavare quindi

$$M_{CED} = P_E(1 + 0.07)^{10} - 100 = 95.33813,$$

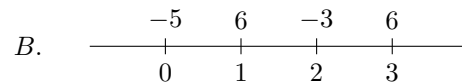
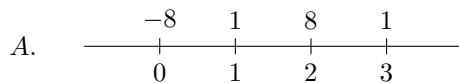
da cui, ricavando la cedola dalla formula usata prima per il montante, si ha

$$CED = \frac{M_{CED}}{a_{\overline{30}|0.02_{1/3}} (1 + 0.02)^{10}} = 2.883164$$

e quindi il tasso cedolare

$$r = \frac{3 \cdot CED}{100} = 0.086495.$$

ESERCIZIO 3. Si considerino le due operazioni finanziarie rappresentate nelle figure qui sotto



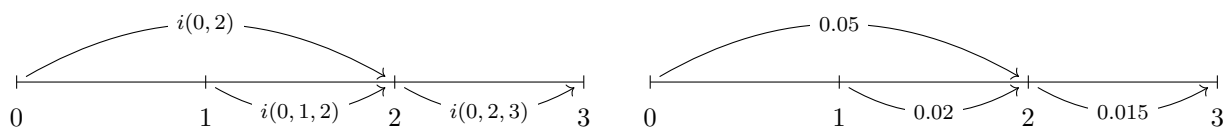
e la seguente struttura per scadenza dei tassi (a pronti/termine) su base annua:

$$i(0, 2) = 0.05 \quad , \quad i(0, 1, 2) = 0.02 \quad , \quad i(0, 2, 3) = 0.015$$

Si stabilisca quale dei due progetti risulta conveniente in base al criterio del REA/VAN, e se convengono rispetto all'investimento in denaro. Si dica se per entrambi i progetti i flussi consentono di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento. Si dica poi se il valore del TIR per il progetto A è maggiore o minore dell'11%. Si determini un intervallo che contenga il TIR del progetto A.



La rappresentazione qui sotto raffigura la struttura dei tassi fornita.



Per il calcolo del REA dei due progetti occorre attualizzare all'istante iniziale ($t = 0$) gli importi alle varie scadenze future. Si può fare in più modi, ad esempio ricostruendo tutta la struttura dei tassi, in particolare procurandosi i tassi a pronti alle scadenze non ancora disponibili (cioè $i(0, 1)$ e $i(0, 3)$). Però si può arrivare al risultato anche direttamente, senza calcolare nuovi tassi. (Si faccia attenzione, per capire gli esponenti, che i tassi sono forniti su base annua.)

$$REA_A = -8 + 1 \cdot (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2))^{-2} + 8 \cdot (1 + i(0, 2))^{-2} + 1 \cdot (1 + i(0, 2, 3))^{-1}(1 + i(0, 2))^{-2} = 1.08$$

e

$$REA_B = -5 + 6 \cdot (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2))^{-2} - 3 \cdot (1 + i(0, 2))^{-2} + 6 \cdot (1 + i(0, 2, 3))^{-1}(1 + i(0, 2))^{-2} = 3.19$$

Risulta preferibile il progetto B. Per entrambi il REA è positivo e quindi sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro.

I flussi cumulati dei due progetti sono

$$\text{Progetto A: } -8, -7, +1, +2 \quad \text{e} \quad \text{Progetto B: } -5, +1, -2, +4.$$

Con il progetto A c'è un solo cambio di segno, mentre con il progetto B ce ne sono due. Quindi solo per A possiamo affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento.

Il TIR di A è maggiore o minore dell'11%? Se calcoliamo il REA di A al tasso dell'11% (struttura piatta) otteniamo

$$REA_A(0.11) = -8 + 1 \cdot 1.11^{-1} + 8 \cdot 1.11^{-2} + 1 \cdot 1.11^{-3} = 0.12 > 0.$$

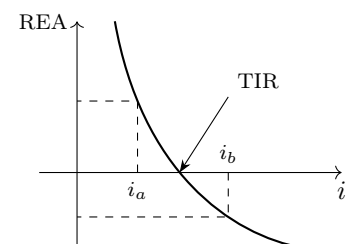
Quindi il TIR per il progetto A è maggiore dell'11%.

Veniamo all'ultima domanda: un intervallo che contenga il TIR del progetto A. La figura qui a fianco può aiutare.

Si tratta di trovare due tassi, i_a e i_b , tali che per i_a il REA sia positivo e per i_b il REA sia negativo. Non c'è una formula che porti ad un risultato unico, ovviamente, ci sono infinite risposte corrette possibili. Però, tenendo conto che abbiamo appena trovato che all'11% il REA è positivo, possiamo dire che i_a può essere l'11%. Non abbiamo ora indizi per i_b , ma "proviamo" con il 12%. Si ottiene

$$REA_A(0.12) = -8 + 1 \cdot 1.12^{-1} + 8 \cdot 1.12^{-2} + 1 \cdot 1.12^{-3} = -0.02 < 0.$$

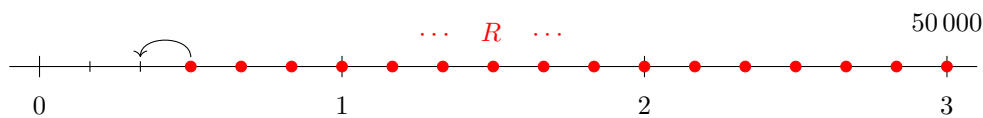
Pertanto il TIR è minore del 12% e possiamo porre $i_b = 0.12$. Quindi il TIR è nell'intervallo tra l'11% e il 12%.



ESAME di MODELLI MATEMATICI per le DECISIONI ECONOMICO-AZIENDALI
Vicenza, 21/01/2026

ESERCIZIO 1. La costituzione di un capitale di 50 000€ fra 3 anni avviene versando rate bimestrali, la prima tra 6 mesi. Si determini la rata necessaria, al tasso di interesse annuo del 5%.

Se invece si vuole avere lo stesso capitale alla fine dei 3 anni versando rate di 5 000€ con la stessa cadenza precedente, si trovi il minimo numero di rate necessarie. Dopo quanti mesi da oggi si raggiunge l'obiettivo? Qual è l'effettivo capitale costituito alla fine dei versamenti?



Poniamo $i = 0.05$. Serve il tasso bimestrale equivalente $i_{1/6} = (1 + i)^{1/6} - 1 = 0.00816485$.

L'equazione dell'equivalenza finanziaria è

$$50\,000 = R \cdot a_{\overline{16}|i_{1/6}} (1 + i_{1/6})^{16},$$

da cui si ricava

$$R = \frac{50\,000}{a_{\overline{16}|i_{1/6}} (1 + i_{1/6})^{16}} = 2\,938.04\text{€}.$$

Passiamo alla seconda domanda. Stesso capitale alla fine dei 3 anni con rate di 5 000€ (bimestrali, la prima tra 6 mesi): quante rate almeno? L'equazione (disequazione) è

$$5\,000 \cdot a_{\overline{n}|i_{1/6}} (1 + i_{1/6})^{16} \geq 50\,000. \quad ^2$$

Ora inizia il tipico procedimento che applichiamo quando dobbiamo trovare il numero di rate, quello con i logaritmi per intenderci. Quindi scriviamo la disequazione esplicitando l'espressione di $a_{\overline{n}|i}$.

$$a_{\overline{n}|i_{1/6}} \geq \frac{50\,000}{5\,000(1 + i_{1/6})^{16}} (= A) \quad \text{cioè} \quad \frac{1 - (1 + i_{1/6})^{-n}}{i_{1/6}} \geq A$$

quindi

$$(1 + i_{1/6})^{-n} \leq 1 - i_{1/6}A \quad ; \quad -n \ln(1 + i_{1/6}) \leq \ln(1 - i_{1/6}A)$$

e infine

$$n \geq -\frac{\ln(1 - i_{1/6}A)}{\ln(1 + i_{1/6})} = 9.15.$$

Pertanto sono necessarie almeno 10 rate (e ovviamente con 10 rate costituiamo alla scadenza dei 3 anni più di 50 000€).

Dopo quanti mesi da oggi l'obiettivo è raggiunto? Dopo 2 + 10 bimestri da oggi, cioè 24 mesi.

Il capitale costituito alla fine dei versamenti (attenzione: alla fine dei versamenti, non alla scadenza dei 3 anni) è

$$M = 5\,000 \cdot a_{\overline{10}|i_{1/6}} (1 + i_{1/6})^{10} = 51\,877.67\text{€}.$$

ESERCIZIO 2. Un debito di 30 000€, contratto oggi, deve essere restituito con un piano di ammortamento di 10 anni (rate annue posticipate), quote capitale che ogni anno aumentano del 10% e tasso di interesse annuo del 7%. Le quote interessi vanno versate alla fine di ogni anno.

Si compili la sezione del piano di ammortamento relativa ai primi 3 anni e agli ultimi 2 riportando, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

²Attenzione, il fattore di capitalizzazione a destra deve essere $(1 + i_{1/6})^{16}$ e non $(1 + i_{1/6})^n$ o peggio $(1 + i)^3$: il primo è sbagliato perché porta il montante alla scadenza dell'ultima rata e non alla fine dei 3 anni e il secondo è banalmente sbagliato perché non tiene conto del differimento e quindi porta il montante oltre la scadenza dei 3 anni.



Poniamo D_0 il debito, $i = 0.07$ e $q = 1.1$ (la ragione della progressione geometrica). Attenzione che sono le quote capitale ad essere in progressione, quindi la formula (nel formulario) in cui compare una progressione geometrica va usata con cautela.³

Va detto anzitutto che c'è modo di evitare l'uso della formula. Vediamo prima questo. Basta considerare le quote una per una, elencandole tutte. Sono 10, si può ancora fare: se fossero 100 non converrebbe. Ricordando che la somma delle quote capitale deve dare il debito, si può scrivere

$$C_1 + C_1q + C_1q^2 + \dots + C_1q^9 = D_0, \text{ da cui } C_1 = \frac{D_0}{1 + q + q^2 + \dots + q^9} \quad \left(C_1 = \frac{D_0}{\sum_{n=0}^9 q^n} \right).$$

Usiamo invece la formula, adattandola al caso in questione. La formula tiene conto dell'effetto attualizzazione, cioè che le rate devono essere attualizzate. Questo avviene attraverso il fattore di sconto (v nella formula). Se vogliamo annullare l'effetto del fattore di sconto basta porlo uguale ad 1.⁴ In questo modo le quote capitale pesano per quello che sono, senza attualizzazione. L'equazione pertanto diventa

$$D_0 = C_1 \frac{1 - q^{10}}{1 - q}, \text{ da cui } C_1 = D_0 \frac{1 - q}{1 - q^{10}} = 1\,882.36\text{€}.$$

A questo punto il piano di ammortamento è "sbloccato", cioè possiamo trovare tutte le altre quantità. Nella prima riga possiamo ricavare

$$I_1 = i \cdot D_0 = 0.07 \cdot 30\,000 = 2\,100\text{€}$$

$$R_1 = C_1 + I_1 = 2\,100 + 1\,882.36 = 3\,982.36\text{€}$$

e analogamente nella 2^a e 3^a riga, ricordando che

$$C_2 = C_1 \cdot q = 2\,070.60\text{€} \quad \text{e} \quad C_3 = C_2 \cdot q = 2\,277.66\text{€}.$$

La sezione del piano di ammortamento relativa ai primi 3 anni è questa.

t	R_t	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	30 000
1	3 982.36	1 882.36	2 100	28 117.64
2	4 038.83	2 070.60	1 968.23	26 047.04
3	4 100.95	2 277.66	1 823.29	23 769.38

Ora passiamo alla sezione del piano relativa agli ultimi 2 anni.

Conosciamo le ultime due quote capitale, dalla progressione geometrica. Abbiamo quindi

$$C_9 = C_1 \cdot q^8 = 4\,035.01\text{€} \quad \text{e} \quad C_{10} = C_1 \cdot q^9 = 4\,438.51\text{€}.$$

t	R_t	C_t	I_t	D_t
8	...	...	...	...
9	R_9	4 035.01	I_9	D_9
10	R_{10}	4 438.51	I_{10}	0

³La formula è

$$V_0 = \begin{cases} Rv \frac{1 - (qv)^n}{1 - qv} & \text{se } qv \neq 1 \\ nRv & \text{se } qv = 1 \end{cases}$$

e fornisce il valore attuale di una rendita con rate in progressione geometrica. Se fossero le rate del piano ad essere in progressione la formula sarebbe direttamente utilizzabile, ma qui sono le quote capitale.

⁴Ossia porre il tasso uguale a zero, ricordando che $v = \frac{1}{1+i}$.

Ora abbiamo

$$D_9 = C_{10} \quad \text{e quindi} \quad I_{10} = i \cdot D_9 = 310.70\text{€} \quad \text{e quindi} \quad R_{10} = C_{10} + I_{10} = 4749.52\text{€}.$$

Poi

$$D_8 - C_9 = D_9, \quad \text{da cui} \quad D_8 = C_9 + D_9 = 8437.52\text{€}$$

e quindi

$$I_9 = i \cdot D_8 = 593.15\text{€} \quad \text{e infine} \quad R_9 = C_9 + I_9 = 4628.16\text{€}.$$

Il prospetto per gli ultimi 2 anni è pertanto questo.

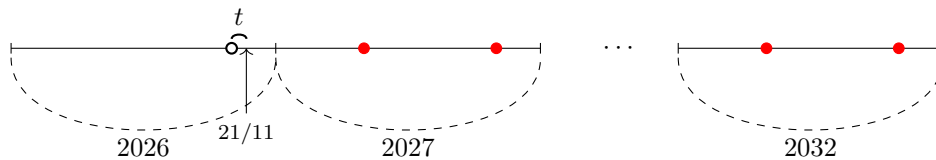
t	R_t	C_t	I_t	D_t
8	...	...	...	8 437.52
9	4 628.16	4 035.01	593.15	4 438.51
10	4 749.52	4 438.51	310.70	0

ESERCIZIO 3. Si consideri un B.T.P. con scadenza il 01/11/2032, che paga cedole al tasso cedolare $r = 4.5\%$. Il 21/11/2026 si osserva un tasso di rendimento a scadenza pari al $i = 3.5\%$. Assumendo che il BTP rimborsi alla pari, si determini Prezzo tel-quel, rateo e corso secco in data 21/11/2026 (si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si consideri poi lo scenario alternativo in cui il B.T.P. descritto sopra rimborsa sopra la pari con rimborso a scadenza $C = 150$. Si determini se questo comporterebbe il pagamento di tasse sulle plusvalenze a scadenza.



Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Fino alla scadenza del 01/11/2032 il titolo paga $n = 12$ cedole. Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2} F(1 - \gamma) = \frac{0.045}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 1.96875.$$

Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/11/2026) è $t = 20$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 1.96875 \cdot \frac{20}{180} = 0.21875.$$

Conoscendo il tasso di rendimento a scadenza, nell'ipotesi che non ci sia tassazione sul rimborso finale, possiamo trovare il prezzo tel quel.

$$P_{\text{tq}} = 1.96875 \cdot a_{\overline{12}|ytm_{1/2}} (1 + ytm_{1/2})^{20/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-12+20/180} = 102.709.$$

Il corso secco risulta allora

$$P_s = P_{\text{tq}} - \text{rateo} = 102.491, \text{ maggiore del valore rimborsato.}$$

Pertanto possiamo concludere che è corretta l'ipotesi della non tassazione finale e quindi si ha

$$P_{\text{tq}} = 102.709 \quad \text{e} \quad P_s = 102.491.$$

Consideriamo ora lo scenario alternativo in cui il B.T.P. rimborsa sopra la pari con rimborso a scadenza $C = 150$. Ipotizzando anche qui la non tassazione del rimborso finale, l'equazione di prima diventa (con lo stesso tasso di rendimento a scadenza)

$$P_{tq} = 1.96875 \cdot a_{\overline{12}|ytm_{1/2}} (1 + ytm_{1/2})^{20/180} + 150(1 + ytm_{1/2})^{-12+20/180} = 143.462.$$

da cui si ricava il corso secco

$$P_s = P_{tq} - \text{rateo} = 143.243.$$

Questa volta l'ipotesi non è coerente con i valori: la nuova situazione comporterebbe il pagamento di tasse sulle plusvalenze a scadenza.

ESERCIZIO 4. Si considerino le due operazioni finanziarie rappresentate nelle figure qui sotto



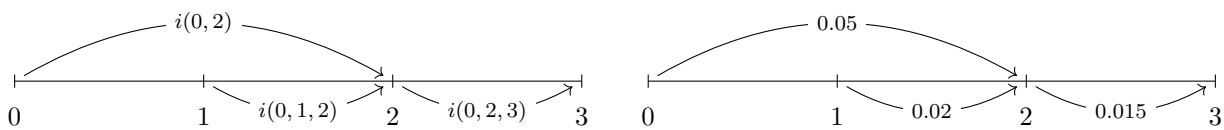
e la seguente struttura per scadenza dei tassi (a pronti/termine) su base annua:

$$i(0, 2) = 0.05 \quad , \quad i(0, 1, 2) = 0.02 \quad , \quad i(0, 2, 3) = 0.015$$

Si stabilisca quale dei due progetti risulta conveniente in base al criterio del REA/VAN, e se convergono rispetto all'investimento in denaro. Si dica se per entrambi i progetti i flussi consentono di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento. Si dica poi se il valore del TIR per il progetto A è maggiore o minore dell'11%. Si determini un intervallo che contenga il TIR del progetto A.



La rappresentazione qui sotto raffigura la struttura dei tassi fornita.



Per il calcolo del REA dei due progetti occorre attualizzare all'istante iniziale ($t = 0$) gli importi alle varie scadenze future. Si può fare in più modi, ad esempio ricostruendo tutta la struttura dei tassi, in particolare procurandosi i tassi a pronti alle scadenze non ancora disponibili (cioè $i(0, 1)$ e $i(0, 3)$). Però si può arrivare al risultato anche direttamente, senza calcolare nuovi tassi. (Si faccia attenzione, per capire gli esponenti, che i tassi sono forniti su base annua.)

$$REA_A = -8 + 1 \cdot (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2))^{-2} + 8 \cdot (1 + i(0, 2))^{-2} + 1 \cdot (1 + i(0, 2, 3))^{-1}(1 + i(0, 2))^{-2} = 1.08$$

e

$$REA_B = -5 + 6 \cdot (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2))^{-2} - 3 \cdot (1 + i(0, 2))^{-2} + 6 \cdot (1 + i(0, 2, 3))^{-1}(1 + i(0, 2))^{-2} = 3.19$$

Risulta preferibile il progetto B. Per entrambi il REA è positivo e quindi sono entrambi convenienti rispetto all'investimento in denaro.

I flussi cumulati dei due progetti sono

$$\text{Progetto A: } -8, -7, +1, +2 \quad \text{e} \quad \text{Progetto B: } -5, +1, -2, +4.$$

Con il progetto A c'è un solo cambio di segno, mentre con il progetto B ce ne sono due. Quindi solo per A possiamo affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento.

Il TIR di A è maggiore o minore dell'11%? Se calcoliamo il REA di A al tasso dell'11% (struttura piatta) otteniamo

$$REA_A(0.11) = -8 + 1 \cdot 1.11^{-1} + 8 \cdot 1.11^{-2} + 1 \cdot 1.11^{-3} = 0.12 > 0.$$

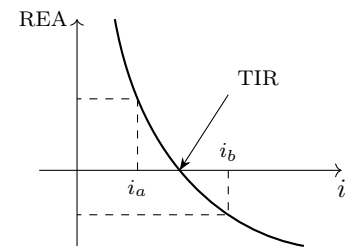
Quindi il TIR per il progetto A è maggiore dell'11%.

Veniamo all'ultima domanda: un intervallo che contenga il TIR del progetto A . La figura qui a fianco può aiutare.

Si tratta di trovare due tassi, i_a e i_b , tali che per i_a il REA sia positivo e per i_b il REA sia negativo. Non c'è una formula che porti ad un risultato unico, ovviamente, ci sono infinite risposte corrette possibili. Però, tenendo conto che abbiamo appena trovato che all'11% il REA è positivo, possiamo dire che i_a può essere l'11%. Non abbiamo ora indizi per i_b , ma “proviamo” con il 12%. Si ottiene

$$\text{REA}_A(0.12) = -8 + 1 \cdot 1.12^{-1} + 8 \cdot 1.12^{-2} + 1 \cdot 1.12^{-3} = -0.02 < 0.$$

Pertanto il TIR è minore del 12% e possiamo porre $i_b = 0.12$. Quindi il TIR è nell'intervallo tra l'11% e il 12%.



PROVA CONCLUSIVA DI MODELLI MATEMATICI per le DECISIONI ECONOMICO-AZIENDALI
Vicenza, 10/02/2026

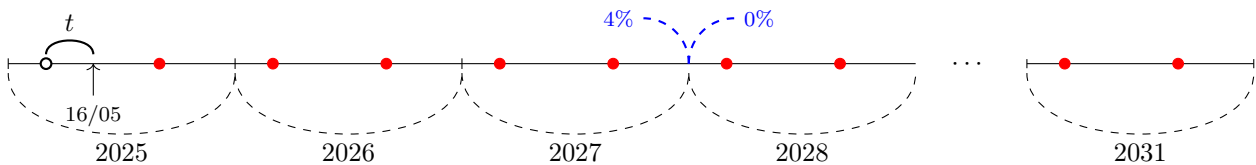
ESERCIZIO 1. Si consideri un B.T.P. con scadenza il 01/09/2031, che paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 7\%$. Il 16/05/2025 era quotato (corso secco) a 98. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si consideri il caso in cui possiamo reinvestire le cedole in un conto deposito con un tasso di remunerazione del 4% fino al 01/01/2028, ed un tasso del 0% successivamente. Si determini il tasso effettivo di rendimento di questa operazione.

Nel caso in cui il periodo di remunerazione del conto corrente al 4% sia esteso di un ulteriore anno otterrei un tasso effettivo di rendimento maggiore o minore? Si motivi la risposta senza fare i calcoli.



Il titolo paga le cedole al 01/03 e al 01/09. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Fino alla scadenza del 01/09/2031 il titolo paga $n = 13$ cedole. Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2} F(1 - \gamma) = \frac{0.07}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 3.0625.$$

Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/03/2025) è $t = 75$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 3.0625 \cdot \frac{75}{180} = 1.2760.$$

Il prezzo tel quel è

$$P_{\text{tq}} = P_s + \text{rateo} = 99.2760.$$

Vi è plusvalenza, dato che l'acquisto avviene sotto la pari. Il rimborso viene tassato e il rimborso netto è

$$CN = 100 - (100 - 98) \cdot \gamma = 99.75.$$

Indicando con i^{eff} il tasso effettivo (e con $i_{1/2}^{\text{eff}}$ il suo equivalente semestrale), l'equazione che permette di valutarlo è

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{1/2}^{\text{eff}})^{-75/180+13} = M_{\text{CED}} + CN, \quad \text{da cui} \quad i_{1/2}^{\text{eff}} = \left(\frac{M_{\text{CED}} + CN}{P_{\text{tq}}} \right)^{1/(-75/180+13)} - 1, \quad (1)$$

dove M_{CED} è il montante delle cedole. Dato il cambio di tasso di reinvestimento (4% fino al 01/01/2028 e 0% successivamente) è opportuno scomporre M_{CED} nelle due parti $M_{\text{CED}}^{(1)}$ e $M_{\text{CED}}^{(2)}$ relative al primo e secondo insieme di cedole. Abbiamo 5 cedole che rientrano nel primo periodo (entro il 01/01/2028) e le restanti 8 nel secondo periodo.

Per quanto riguarda la capitalizzazione al tasso dello 0% si consideri che ad un tasso di interesse nullo non c'è capitalizzazione, cioè il valore rimane inalterato nel tempo. Si consideri che questo avviene sia per le 8 cedole finali, sia per il montante delle prime 5 al 01/01/2028. Quindi abbiamo

$$M_{\text{CED}}^{(1)} = \text{CED} \cdot a_{\overline{5}|0.04_{1/2}}(1 + 0.04_{1/2})^{5+4/6} = 16.1411 \quad \text{e} \quad M_{\text{CED}}^{(2)} = \text{CED} \cdot 8 = 24.5.$$

Pertanto, riprendendo la formula (1) del tasso effettivo, si ha

$$i_{1/2}^{\text{eff}} = \left(\frac{M_{\text{CED}}^{(1)} + M_{\text{CED}}^{(2)} + CN}{P_{\text{tq}}} \right)^{1/(-75/180+13)} - 1 = 0.02792114.$$

Il corrispondente tasso effettivo su base annua è

$$i^{\text{eff}} = (1 + i_{1/2}^{\text{eff}})^2 - 1 = 0.05662186.$$

Passiamo alla seconda domanda, in cui si chiede di dire, senza fare calcoli, come cambia il tasso effettivo nell'ipotesi che il periodo di remunerazione del conto corrente al 4% sia esteso di un ulteriore anno.

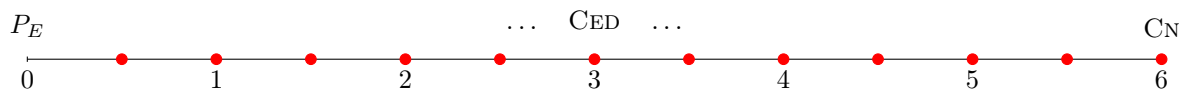
Si consideri l'espressione del tasso effettivo, quella della formula (1) a destra. Se il periodo di remunerazione si allunga c'è una capitalizzazione al 4% di cedole che prima non erano remunerate: questo comporta un maggiore montante di cedole. Quindi, se il numeratore della frazione aumenta, ovviamente aumenta anche il tasso effettivo.

ESERCIZIO 2. Si consideri un'obbligazione con le seguenti caratteristiche:

- valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza dopo 6 anni;
- cedole semestrali con tasso cedolare $r = 3.5\%$;
- Prezzo di emissione $P_E = 94.2$.

Si consideri la tassazione e si usi l'anno commerciale. Si verifichi che il tasso di rendimento a scadenza all'emissione era vicino al 4.1%. Si determini la duration dell'obbligazione al tasso del 4.1%. Utilizzando la duration appena ottenuta, si dia poi un'approssimazione della variazione del prezzo a seguito di una diminuzione relativa del tasso del 10%.

Si determini la duration di un portafoglio composto dall'obbligazione sopra descritta e uno Z.C.B. con scadenza a due anni e mezzo, tasso di rendimento a scadenza sempre pari al 4.1%, e un rimborso a scadenza pari a 145.



Il tasso di rendimento a scadenza è il tasso che soddisfa l'equazione

$$P_E = \text{CED} \cdot a_{\overline{12}|ytm_{1/2}} + \text{CN}(1 + ytm_{1/2})^{-12}.$$

Ci servono cedola e rimborso netto. Si ha

$$\text{CED} = \frac{r}{2} F(1 - \gamma) = \frac{0.035}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 1.53125$$

e (vi è tassazione sul valore di rimborso, in quanto il prezzo di emissione è sotto la pari)

$$\text{CN} = 100 - (100 - 94.2)\gamma = 99.275.$$

Calcolando ora il valore corrispondente al tasso del 4.1% si ottiene

$$\text{CED} \cdot a_{\overline{12}|0.041_{1/2}} + \text{CN}(1 + 0.041_{1/2})^{-12} = 94.172, \text{ non lontano dal prezzo } P_E.$$

Passiamo al calcolo della duration, al tasso del 4.1%, che indico per comodità con i . Usiamo la formula con la increasing annuity (le cedole sono 12 e dobbiamo usare il tasso semestrale).

$$Ia_{\overline{12}|i_{1/2}} = \frac{a_{\overline{12}|i_{1/2}}(1 + i_{1/2}) - 12(1 + i_{1/2})^{-12}}{i_{1/2}} = 66.09085268.$$

Ora la formula della duration (attenzione, la duration sarà espressa in semestri):

$$D_{1/2}(i) = \frac{\text{CED} \cdot Ia_{\overline{12}|i_{1/2}} + 12 \cdot \text{CN}(1 + i_{1/2})^{-12}}{\text{CED} \cdot a_{\overline{12}|i_{1/2}} + \text{CN}(1 + i_{1/2})^{-12}} = 11.0149 \quad (\text{semestri}).$$

Dobbiamo convertire la duration in anni.

$$D(i) = \frac{D_{1/2}(i)}{2} = 5.5074.$$

La duration modificata è

$$D_{\text{mod}} = \frac{D(i)}{1+i} = 5.2905.$$

Ora il calcolo della variazione del prezzo.

$$\Delta P \simeq -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P_0.$$

Attenzione che abbiamo una diminuzione *relativa* del tasso del 10%, e quindi $\Delta i = -i \cdot 0.1 = -0.0041$. Pertanto

$$\Delta P \simeq -5.2905 \cdot (-0.0041) \cdot 94.172 = +2.043.$$

L'ultima domanda propone un portafoglio composto dall'obbligazione e uno Z.C.B. con scadenza due anni e mezzo e chiede di trovarne la duration, con un tasso di rendimento a scadenza pari ancora al 4.1%. Lo Z.C.B. rimborsa a scadenza 145.

Indichiamo con D_{OBB} e D_{ZCB} le duration rispettivamente dell'obbligazione e dello Z.C.B. Abbiamo già questi valori e si ha

$$D_{\text{OBB}} = 5.5074 \quad \text{e} \quad D_{\text{ZCB}} = 2.5.$$

Sappiamo che la duration del portafoglio (D_{PORT}) è una media pesata delle due duration con pesi dati dalle valorizzazioni dei titoli, cioè dai pesi relativi che i due titoli hanno nel portafoglio. Se indichiamo con P_{OBB} e P_{ZCB} il valore iniziale dei due titoli, si ha

$$P_{\text{OBB}} = 94.172 \text{ (trovato prima)} \quad \text{e} \quad P_{\text{ZCB}} = 145(1 + 0.041)^{-2.5} = 131.1418.$$

Pertanto i pesi sono

$$q_{\text{OBB}} = \frac{P_{\text{OBB}}}{P_{\text{OBB}} + P_{\text{ZCB}}} = 0.418 \quad \text{e} \quad q_{\text{ZCB}} = \frac{P_{\text{ZCB}}}{P_{\text{OBB}} + P_{\text{ZCB}}} = 0.582.$$

La duration del portafoglio è allora

$$D_{\text{PORT}} = D_{\text{OBB}} \cdot q_{\text{OBB}} + D_{\text{ZCB}} \cdot q_{\text{ZCB}} = 3.757.$$

ESERCIZIO 3. Si consideri l'operazione finanziaria rappresentata nella figura qui sotto.

$$A. \quad \begin{array}{cccccc} & -6 & -1 & 3 & 5 & 4 \\ \hline & | & | & | & | & | \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Possiamo affermare che per il progetto esiste unico il tasso interno di rendimento? Si dica se il valore del TIR è maggiore del 5% oppure no. Si valuti infine il progetto sulla base del criterio TRM con un tasso a credito $i_+ = 2\%$ e un tasso a debito $i_- = 4\%$.



Il flusso cumulato del progetto è

$$-6, -7, -4, +1, +5$$

C'è un solo cambio di segno e quindi possiamo affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento.

Il TIR è maggiore o minore del 5%? Se calcoliamo il REA del progetto al tasso del 5% (struttura piatta) otteniamo

$$\text{REA}_A(0.05) = -6 - 1 \cdot 1.05^{-1} + 3 \cdot 1.05^{-2} + 5 \cdot 1.05^{-3} + 4 \cdot 1.05^{-4} = 3.38 > 0$$

e quindi il TIR è maggiore del 5%.

L'ultima domanda: valutare il progetto sulla base del criterio TRM, con un tasso a credito $i_+ = 2\%$ e un tasso a debito $i_- = 4\%$.

Il criterio TRM opera sui saldi e, in base alla positività o negatività di questi, applica rispettivamente il tasso a credito o quello a debito per il calcolo del saldo successivo. Calcoliamo la sequenza dei saldi.

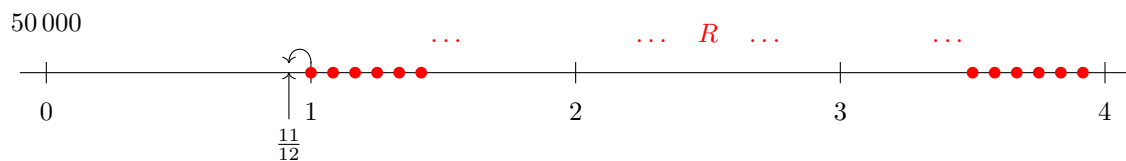
$$\begin{aligned} M_0 &= -6 \\ M_1 &= -6 \cdot (1 + i_-) - 1 = -7.24 \\ M_2 &= -7.24 \cdot (1 + i_-) + 3 = -4.53 \\ M_3 &= -4.53 \cdot (1 + i_-) + 5 = 0.29 \\ M_4 &= 0.29 \cdot (1 + i_+) + 4 = 4.30. \end{aligned}$$

Data la positività di M_4 , in base al criterio TRM il progetto è conveniente.

ESAME di MODELLI MATEMATICI per le DECISIONI ECONOMICO-AZIENDALI
Vicenza, 10/02/2026

ESERCIZIO 1. Un prestito di 50 000€ viene restituito in 36 rate mensili (costanti), la prima tra un anno, al tasso di interesse del 10%. Si determini la rata.

Nel caso le 36 rate mensili siano posticipate, ma senza il differimento, si trovi una prima approssimazione del tasso di interesse applicato e se tale approssimazione è per difetto o per eccesso.



Serve ovviamente il tasso di interesse mensile equivalente al tasso annuo del 10%. Si ha $i_{1/12} = (1 + 0.1)^{1/12} - 1 = 0.00797414$. Indicando con R la rata da trovare, l'equazione del valore è

$$50\,000 = R \cdot a_{\overline{36}|i_{1/12}} (1 + i_{1/12})^{-11},$$

da cui si trova

$$R = \frac{50\,000}{a_{\overline{36}|i_{1/12}} (1 + i_{1/12})^{-11}} = 1\,749.63\text{€}.$$

Se le stesse rate sono posticipate, ma senza il differimento, e quindi la prima è tra un mese, il tasso applicato è ovviamente maggiore del 10% (per chi deve restituire il debito è meglio la prima modalità, quella col differimento). Una prima approssimazione del tasso si può ottenere con la formula (presente nel formulario) relativa al caso di una rendita posticipata (immediata).⁵

Nel nostro caso, se togliamo il differimento, l'equazione si presenta proprio nella forma giusta, e cioè

$$50\,000 = R \cdot a_{\overline{36}|i_{1/12}}$$

e quindi una prima approssimazione del tasso (mensile) è data da

$$i_{1/12}^0 = \frac{2(36 - 50\,000/1\,749.63)}{37 \cdot 50\,000/1\,749.63} = 0.01403981.$$

L'equivalente tasso di interesse annuo è

$$i^0 = (1 + i_{1/12}^0)^{12} - 1 = 0.18211597.$$

Per dire se questa approssimazione è per difetto o per eccesso basta calcolare il valore di $R \cdot a_{\overline{36}|i_{1/12}^0}$ per questo tasso. Si ottiene

$$R \cdot a_{\overline{36}|i_{1/12}^0} = 49\,178 < 50\,000$$

e quindi si tratta di un'approssimazione per eccesso.

⁵Ricordo che, relativamente all'equazione $V_0 = R \cdot a_{\overline{n}|i}$, una prima approssimazione del tasso è fornita dalla formula

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n + 1)V_0/R}.$$

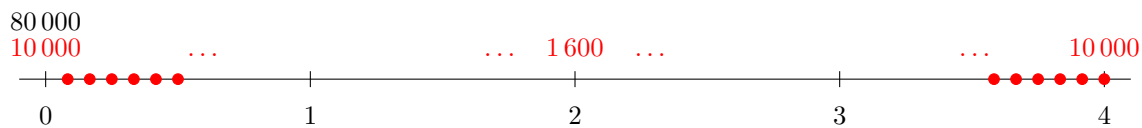
ESERCIZIO 2. L'acquisto di un macchinario del prezzo di 80 000€ avviene attraverso un contratto di leasing che prevede un anticipo di 10 000€ e il resto finanziato in 48 rate costanti mensili di 1 600€, con riscatto finale di 10 000€. La società di leasing, per questo tipo di contratti, ha l'obiettivo di remunerarsi ad un tasso pari almeno al 9%. Si dica se con il contratto proposto l'obiettivo è raggiunto.

Nel caso il cliente chieda una riduzione dell'ammontare della rata, si trovi di quanto la società può abbassarla, mantenendo però il suo obiettivo.

Il cliente ha anche la possibilità di ricevere da una banca un finanziamento di importo pari al prezzo di acquisto, con l'obbligo di restituirlo in due rate: 50 000€ tra 2 anni e 55 000€ tra 4 anni. Si dica qual è la scelta più conveniente per il cliente (leasing o prestito bancario).



Ecco una rappresentazione dell'operazione.



L'equazione del valore è

$$80\,000 = 10\,000 + 1\,600 \cdot a_{\overline{48}|i_{1/12}} + 10\,000(1+i)^{-4}.$$

Per capire se il tasso implicito che regola questo contratto è almeno pari al 9% basta calcolare il valore del termine di destra corrispondente al 9%. Se questo risulta maggiore di 80 000€ la risposta è affermativa. Si ottiene

$$10\,000 + 1\,600 \cdot a_{\overline{48}|0.09_{1/12}} + 10\,000(1+0.09)^{-4} = 81\,812€.$$

Supponiamo ora che il cliente chieda una riduzione dell'ammontare della rata. Per trovare di quanto la società può abbassarla, mantenendo però il suo obiettivo, basta trovare, nella stessa equazione, qual è la rata corrispondente al tasso del 9%. L'equazione è

$$80\,000 = 10\,000 + R \cdot a_{\overline{48}|0.09_{1/12}} + 10\,000(1+0.09)^{-4} \quad \text{da cui} \quad R = \frac{80\,000 - 10\,000 - 10\,000(1+0.09)^{-4}}{a_{\overline{48}|0.09_{1/12}}} = 1\,555.19€.$$

La società può abbassare la rata di $1\,600 - 1\,555.19 = 44.81€$.

Veniamo all'ultima domanda. Come alternativa al contratto di leasing il cliente ha la possibilità di ricevere da una banca un finanziamento di 80 000€ con questa modalità di restituzione: 50 000€ tra 2 anni e 55 000€ tra 4 anni.

Qui si può fare in due modi.

Si può calcolare il tasso implicito di questo scambio monetario. Come vediamo subito questa è una delle (poche) situazioni in cui è possibile il calcolo esatto del tasso. L'equivalenza finanziaria è nell'equazione

$$80\,000 = 50\,000(1+i)^{-2} + 55\,000(1+i)^{-4}. \quad (2)$$

Ponendo $(1+i)^{-2} = v$ l'equazione diventa un'equazione di 2° grado:

$$80\,000 = 50\,000 v + 55\,000 v^2 \quad \text{che, semplificata, diventa } 11v^2 + 10v - 16 = 0, \text{ le cui soluzioni sono } v = \frac{-5 \mp \sqrt{201}}{11}.$$

Solo la soluzione positiva ha un senso finanziario e si trova $v = 0.83431335$. Questo è un fattore di sconto biennale, che corrisponde ad un tasso di interesse annuo

$$i = \frac{1}{v^{1/2}} - 1 = 0.09480155.$$

Se la società di leasing abbassa la rata, e quindi offre un tasso del 9%, il tasso della banca non conviene.

Si poteva, alternativamente, calcolare il termine di destra dell'equazione (2) al tasso del 9% e confrontarlo con gli 80 000€. Si ha

$$50\,000(1+0.09)^{-2} + 55\,000(1+0.09)^{-4} = 81\,047.39€,$$

da cui segue che il tasso della banca è maggiore del 9% e quindi non conviene.

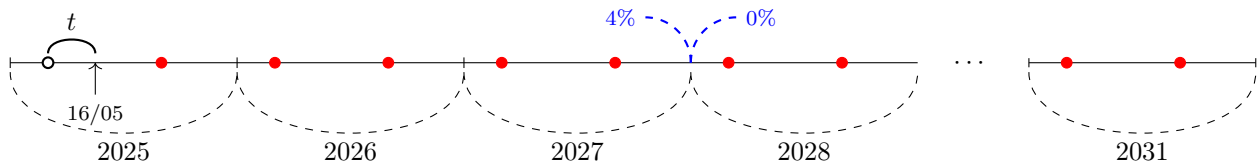
ESERCIZIO 3. Si consideri un B.T.P. con scadenza il 01/09/2031, che paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 7\%$. Il 16/05/2025 era quotato (corso secco) a 98. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si consideri il caso in cui possiamo reinvestire le cedole in un conto deposito con un tasso di remunerazione del 4% fino al 01/01/2028, ed un tasso del 0% successivamente. Si determini il tasso effettivo di rendimento di questa operazione.

Nel caso in cui il periodo di remunerazione del conto corrente al 4% sia esteso di un ulteriore anno otterrei un tasso effettivo di rendimento maggiore o minore? Si motivi la risposta senza fare i calcoli.



Il titolo paga le cedole al 01/03 e al 01/09. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Fino alla scadenza del 01/09/2031 il titolo paga $n = 13$ cedole. Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1 - \gamma) = \frac{0.07}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 3.0625.$$

Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/03/2025) è $t = 75$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 3.0625 \cdot \frac{75}{180} = 1.2760.$$

Il prezzo tel quel è

$$P_{\text{tq}} = P_s + \text{rateo} = 99.2760.$$

Vi è plusvalenza, dato che l'acquisto avviene sotto la pari. Il rimborso viene tassato e il rimborso netto è

$$\text{CN} = 100 - (100 - 98) \cdot \gamma = 99.75.$$

Indicando con i^{eff} il tasso effettivo (e con $i_{1/2}^{\text{eff}}$ il suo equivalente semestrale), l'equazione che permette di valutarlo è

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{1/2}^{\text{eff}})^{-75/180+13} = M_{\text{CED}} + \text{CN}, \quad \text{da cui} \quad i_{1/2}^{\text{eff}} = \left(\frac{M_{\text{CED}} + \text{CN}}{P_{\text{tq}}} \right)^{1/(-75/180+13)} - 1, \quad (3)$$

dove M_{CED} è il montante delle cedole. Dato il cambio di tasso di reinvestimento (4% fino al 01/01/2028 e 0% successivamente) è opportuno scomporre M_{CED} nelle due parti $M_{\text{CED}}^{(1)}$ e $M_{\text{CED}}^{(2)}$ relative al primo e secondo insieme di cedole. Abbiamo 5 cedole che rientrano nel primo periodo (entro il 01/01/2028) e le restanti 8 nel secondo periodo.

Per quanto riguarda la capitalizzazione al tasso dello 0% si consideri che ad un tasso di interesse nullo non c'è capitalizzazione, cioè il valore rimane inalterato nel tempo. Si consideri che questo avviene sia per le 8 cedole finali, sia per il montante delle prime 5 al 01/01/2028. Quindi abbiamo

$$M_{\text{CED}}^{(1)} = \text{CED} \cdot a_{\overline{5}|0.04_{1/2}}(1 + 0.04_{1/2})^{5+4/6} = 16.1411 \quad \text{e} \quad M_{\text{CED}}^{(2)} = \text{CED} \cdot 8 = 24.5.$$

Pertanto, riprendendo la formula (3) del tasso effettivo, si ha

$$i_{1/2}^{\text{eff}} = \left(\frac{M_{\text{CED}}^{(1)} + M_{\text{CED}}^{(2)} + \text{CN}}{P_{\text{tq}}} \right)^{1/(-75/180+13)} - 1 = 0.02792114.$$

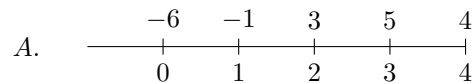
Il corrispondente tasso effettivo su base annua è

$$i^{\text{eff}} = (1 + i_{1/2}^{\text{eff}})^2 - 1 = 0.05662186.$$

Passiamo alla seconda domanda, in cui si chiede di dire, senza fare calcoli, come cambia il tasso effettivo nell'ipotesi che il periodo di remunerazione del conto corrente al 4% sia esteso di un ulteriore anno.

Si consideri l'espressione del tasso effettivo, quella della formula (3) a destra. Se il periodo di remunerazione si allunga c'è una capitalizzazione al 4% di cedole che prima non erano remunerate: questo comporta un maggiore montante di cedole. Quindi, se il numeratore della frazione aumenta, ovviamente aumenta anche il tasso effettivo.

ESERCIZIO 4. Si consideri l'operazione finanziaria rappresentata nella figura qui sotto.



Possiamo affermare che per il progetto esiste unico il tasso interno di rendimento? Si dica se il valore del TIR è maggiore del 5% oppure no. Si valuti infine il progetto sulla base del criterio TRM con un tasso a credito $i_+ = 2\%$ e un tasso a debito $i_- = 4\%$.



Il flusso cumulato del progetto è

$$-6, -7, -4, +1, +5$$

C'è un solo cambio di segno e quindi possiamo affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento.

Il TIR è maggiore o minore del 5%? Se calcoliamo il REA del progetto al tasso del 5% (struttura piatta) otteniamo

$$\text{REA}_A(0.05) = -6 - 1 \cdot 1.05^{-1} + 3 \cdot 1.05^{-2} + 5 \cdot 1.05^{-3} + 4 \cdot 1.05^{-4} = 3.38 > 0$$

e quindi il TIR è maggiore del 5%.

L'ultima domanda: valutare il progetto sulla base del criterio TRM, con un tasso a credito $i_+ = 2\%$ e un tasso a debito $i_- = 4\%$.

Il criterio TRM opera sui saldi e, in base alla positività o negatività di questi, applica rispettivamente il tasso a credito o quello a debito per il calcolo del saldo successivo. Calcoliamo la sequenza dei saldi.

$$\begin{aligned} M_0 &= -6 \\ M_1 &= -6 \cdot (1 + i_-) - 1 = -7.24 \\ M_2 &= -7.24 \cdot (1 + i_-) + 3 = -4.53 \\ M_3 &= -4.53 \cdot (1 + i_-) + 5 = 0.29 \\ M_4 &= 0.29 \cdot (1 + i_+) + 4 = 4.30. \end{aligned}$$

Data la positività di M_4 , in base al criterio TRM il progetto è conveniente.